

5.3 Formules des angles doubles – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Preuves des formules des angles doubles

Exemple 1 : Prouver $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

MG	MD
$\begin{aligned} &= \sin(2x) \\ &= \sin(x + x) \\ &= \sin x \cos x + \cos x \sin x \\ &= 2\sin x \cos x \end{aligned}$	$= 2\sin x \cos x$

MG = MD

Exemple 2 : Prouver $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

MG	MD
$\begin{aligned} &= \cos(2x) \\ &= \cos(x + x) \\ &= \cos x \cos x - \sin x \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$	$= \cos^2 x - \sin^2 x$

MG = MD

Remarque : Il existe des versions alternatives de $\cos 2x$ où soit $\cos^2 x$ soit $\sin^2 x$ sont remplacés en utilisant l'identité de Pythagore.

Partie 2 : Utiliser les formules des angles doubles pour simplifier des expressions

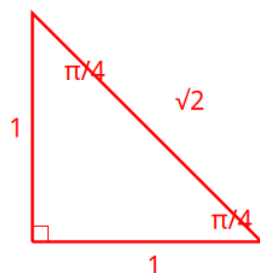
Table 1. Formules des angles doubles

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$
$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$
$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

Exemple 1 : Simplifier chacune des expressions suivantes puis évaluer

Exemple 1 : Simplifier chacune des expressions suivantes puis évaluer

a) $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$

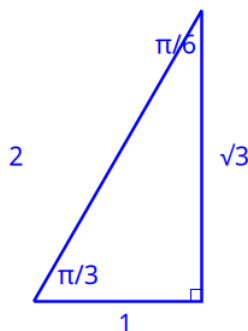


$$= \sin \left[2 \left(\frac{\pi}{8} \right) \right]$$

$$= \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) $\frac{2 \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{6}}$



$$= \tan \left[2 \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

Partie 3 : Déterminer la valeur des rapports trigonométriques pour un angle double

Si vous connaissez l'un des rapports trigonométriques primaires pour un angle donné, vous pouvez déterminer les deux autres. Vous pouvez ensuite déterminer les rapports trigonométriques primaires pour cet angle doublé.

Exemple 2 : Si $\cos \theta = -\frac{2}{3}$ et $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, déterminer la valeur de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$

Nous pouvons résoudre pour $\cos(2\theta)$ sans trouver le rapport sinus si nous utilisons la version suivante de la formule de l'angle double :

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2 \theta - 1$$

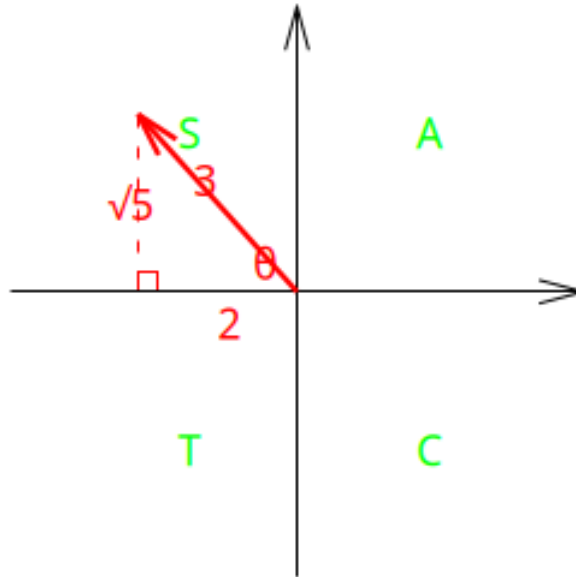
$$\cos(2\theta) = 2 \left(-\frac{2}{3} \right)^2 - 1$$

$$\cos(2\theta) = 2\left(\frac{4}{9}\right) - 1$$

$$\cos(2\theta) = \frac{8}{9} - \frac{9}{9}$$

$$\cos(2\theta) = -\frac{1}{9}$$

Maintenant, pour trouver $\sin(2\theta)$:



$$2^2 + y^2 = 3^2$$

$$y^2 = 5$$

$$y = \sqrt{5}$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

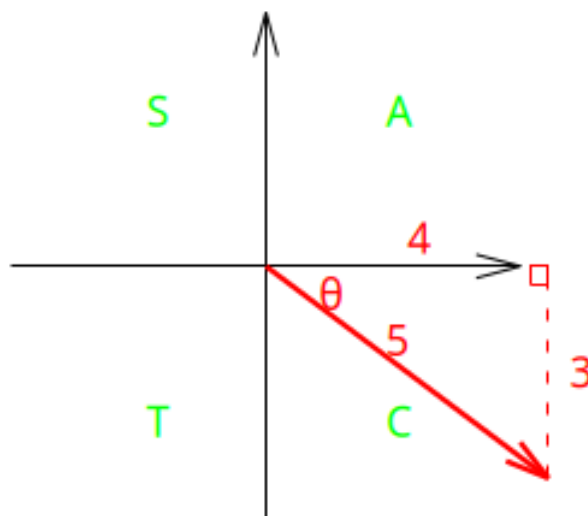
$$= 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos(2\theta) = -\frac{1}{9} \text{ et } \sin(2\theta) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Exemple 3 : Si $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ et $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$, déterminer la valeur de $\cos(2\theta)$.

On nous donne que le bras terminal de l'angle se trouve dans le quadrant 4 :



$$3^2 + 4^2 = r^2$$

$$25 = r^2$$

$$r = 5$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$$

$$= \frac{7}{25}$$

$$\cos(2\theta) = \frac{7}{25}$$