

5.2 Formules des angles composés – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Angle composé : un angle créé en additionnant ou en soustrayant deux angles ou plus.

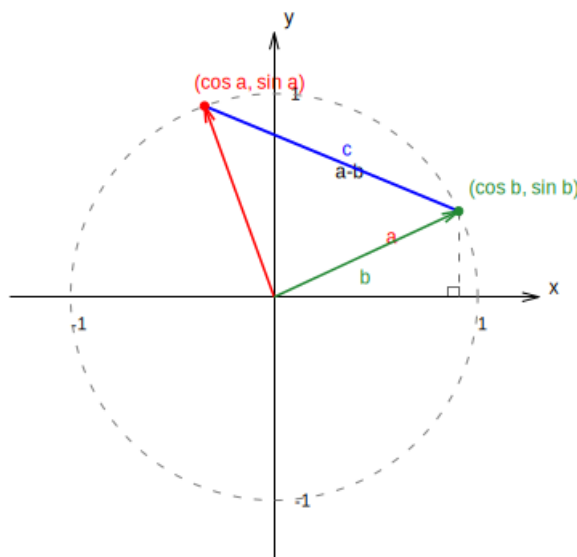
Partie 1 : Preuve de $\cos(x - y)$

Les règles algébriques habituelles ne s'appliquent pas :

$$\cos(x - y) \neq \cos x - \cos y$$

Alors, que vaut $\cos(x - y)$?

Considérons le diagramme ci-contre...



Par la loi des cosinus :

$$c^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos(a - b)$$

$$c^2 = 2 - 2\cos(a - b) \text{ C'EST L'ÉQUATION 1}$$

Mais remarquons que c a pour extrémités $(\cos a, \sin a)$ et $(\cos b, \sin b)$

En utilisant la formule de distance $distance = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$c = \sqrt{(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2}$$

$$c^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2$$

$$c^2 = \cos^2 a - 2\cos a \cos b + \cos^2 b + \sin^2 a - 2\sin a \sin b + \sin^2 b$$

$$c^2 = 1 - 2\cos a \cos b - 2\sin a \sin b + 1$$

$$c^2 = 2 - 2\cos a \cos b - 2\sin a \sin b \text{ C'EST L'ÉQUATION 2}$$

Égalons les équations 1 et 2

$$2 - 2\cos(a - b) = 2 - 2\cos a \cos b - 2\sin a \sin b$$

$$-2\cos(a - b) = -2\cos a \cos b - 2\sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

En remplaçant b par $-y$ (et a par x), et en utilisant les propriétés paire/impaire $\cos(-y) = \cos y$ et $\sin(-y) = -\sin y$:

$\cos(x+y) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
---	---

Partie 2 : Preuves d'autres formules des angles composés

Table 1. Propriétés paire/impaire

$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
---------------------	----------------------

Exemple 1 : Prouver $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

MG	MD
$= \cos(x-y)$ $= \cos[x+(-y)]$ $= \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$ $= \cos x \cos y - \sin x(-\sin y)$ $= \cos x \cos y + \sin x \sin y$	$= \cos x \cos y + \sin x \sin y$

MG = MD

Exemple 2 : Prouver les formules d'addition et de soustraction pour le sinus en utilisant les identités de cofonction et la formule de soustraction pour le cosinus.

Table 2. Identités de cofonction

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
---	---

a) Prouver $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

MG	MD
$= \sin(x+y)$ $= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right)$ $= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right)$ $= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y$ $= \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$

MG = MD

b) Prouver $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

MG	MD
$= \sin(x-y)$ $= \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y)$ $= \sin x \cos y + \cos x(-\sin y)$ $= \sin x \cos y - \cos x \sin y$	$= \sin x \cos y - \cos x \sin y$

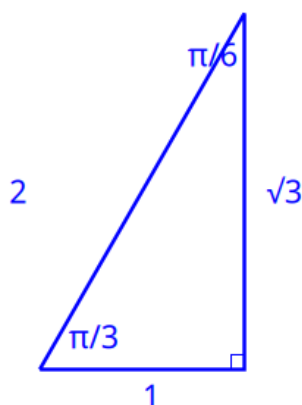
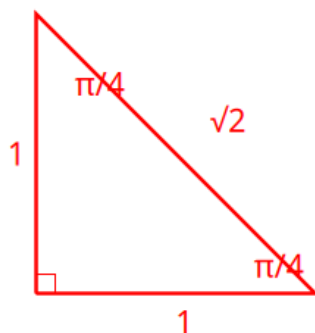
MG = MD

Table 3. Formules des angles composés

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$	$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

Partie 3 : Déterminer les rapports trigonométriques exacts pour des angles autres que les angles particuliers

En exprimant un angle comme une somme ou une différence d'angles des triangles spéciaux, on peut déterminer les valeurs exactes d'autres angles.



Exemple 3 : Utiliser les formules des angles composés pour déterminer les valeurs exactes de

a) $\sin \frac{\pi}{12}$

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} \right) \\
 &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right) &= -\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) \\
&= -\tan\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right) \\
&= -\frac{\tan\left(\frac{2\pi}{12}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{12}\right)}{1 - \tan\left(\frac{2\pi}{12}\right)\tan\left(\frac{3\pi}{12}\right)} \\
&= -\frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= -\frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}} \\
&= -\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}
\end{aligned}$$

Partie 4 : Utiliser les formules des angles composés pour simplifier des expressions trigonométriques

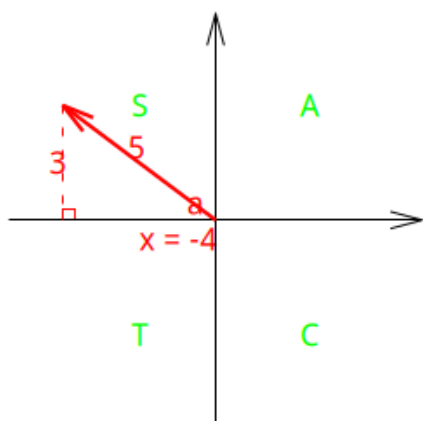
Exemple 4 : Simplifier l'expression suivante

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{7\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} \\
&= \cos\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}\right) \\
&= \cos\frac{2\pi}{12} \\
&= \cos\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Partie 5 : Application

Exemple 5 : Évaluer $\sin(a + b)$, où a et b sont tous deux des angles du deuxième quadrant; sachant que $\sin a = \frac{3}{5}$ et $\sin b = \frac{5}{13}$

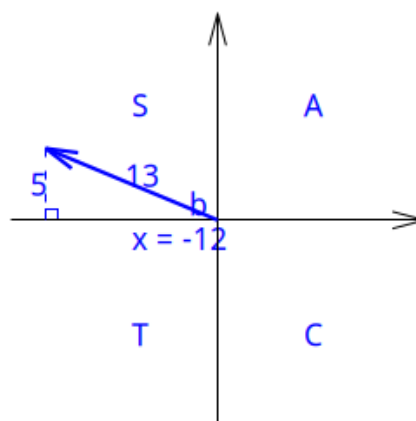
Commencer par tracer les deux bras terminaux dans le deuxième quadrant et résoudre pour le troisième côté.



$$x^2 + 3^2 = 5^2$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4$$



$$x^2 + 5^2 = 13^2$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$= -\frac{36}{65} - \frac{20}{65}$$

$$= -\frac{56}{65}$$