

5.1 Identités de cofonction – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Se rappeler comment prouver des identités trigonométriques

Table 1. Identités trigonométriques fondamentales

Identités réciproques	Identités de quotient	Identités de Pythagore
$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$	$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

Table 2. Trucs et astuces

Identités réciproques	Identités de quotient	Identités de Pythagore
Élever les deux côtés au carré $\csc^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ $\sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ $\cot^2 \theta = \frac{1}{\tan^2 \theta}$	Élever les deux côtés au carré $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$ $\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cot^2 \theta$	Réarranger l'identité $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ Diviser par $\sin^2 \theta$ ou $\cos^2 \theta$ $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

Trucs généraux pour prouver des identités :

- Séparer en MG et MD. Les termes ne peuvent PAS traverser d'un côté à l'autre.
- Essayer de tout ramener à $\sin \theta$ ou $\cos \theta$
- S'il y a deux fractions additionnées ou soustraites, trouver un dénominateur commun et combiner les fractions.
- Utiliser la différence de carrés $\rightarrow 1 - \sin^2 \theta = (1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)$
- Utiliser la règle des puissances $\rightarrow \sin^6 \theta = (\sin^2 \theta)^3$

Exemple 1 : Prouver chacune des identités suivantes

a) $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

MG	MD
$= \tan^2 x + 1$ $= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$ $= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$ $= \frac{1}{\cos^2 x}$	$= \sec^2 x$ $= \frac{1}{\cos^2 x}$

MG = MD

b) $\cos^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$

MG	MD
$= \cos^2 x$	$= (1 - \sin x)(1 + \sin x)$ $= 1 - \sin^2 x$ $= \cos^2 x$

MG = MD

c) $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$

MG	MD
$= \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ $= \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x}$ $= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x}$ $= 1 + \cos x$	$= 1 + \cos x$

MG = MD

Partie 2 : Identités de transformation

En raison de leur nature périodique, il existe plusieurs expressions trigonométriques équivalentes.

Des translations horizontales de $\pi/2$ impliquant à la fois une fonction sinus et une fonction cosinus peuvent être utilisées pour obtenir deux fonctions équivalentes ayant le même graphique.

En tradant la fonction cosinus de $\pi/2$ vers la **droite**, $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ donne le graphique de la fonction sinus, $f(x) = \sin x$.

De même, en tradant la fonction sinus de $\pi/2$ vers la **gauche**, $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ donne le graphique de la fonction cosinus, $f(x) = \cos x$.

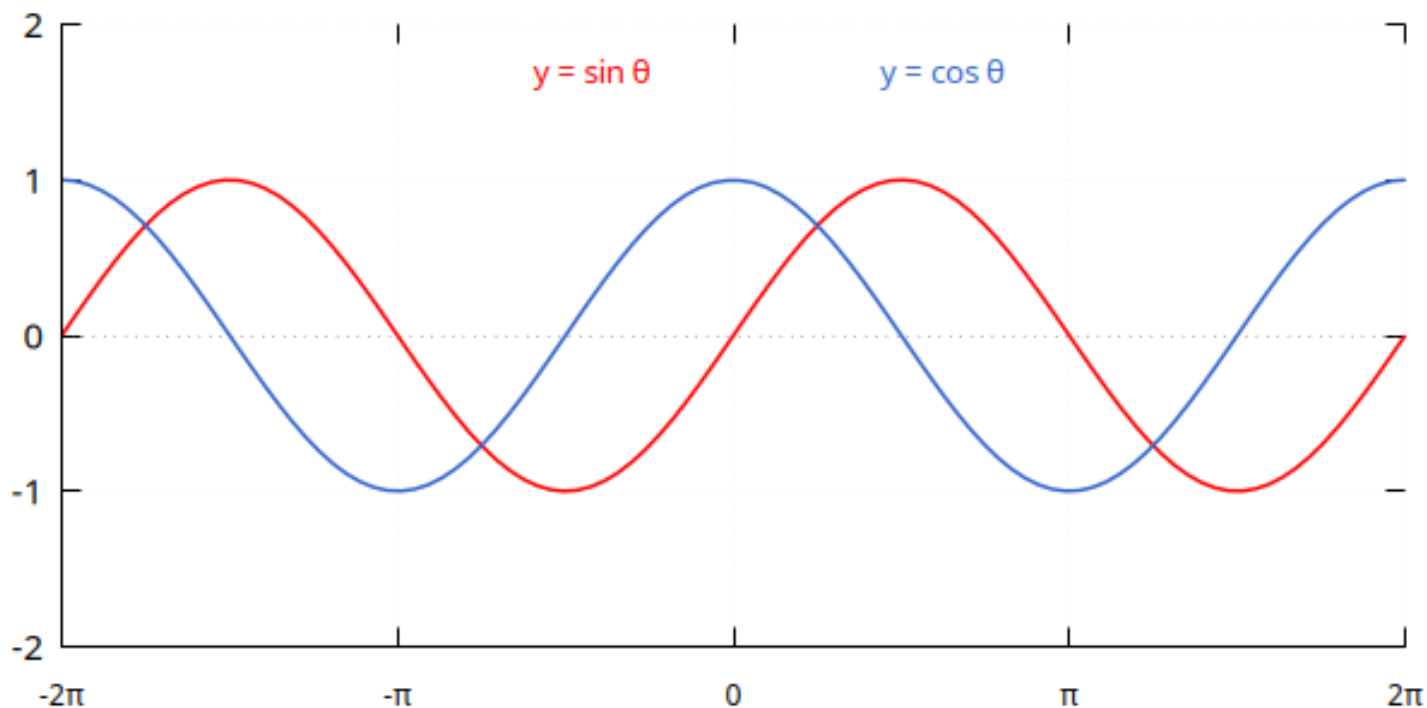


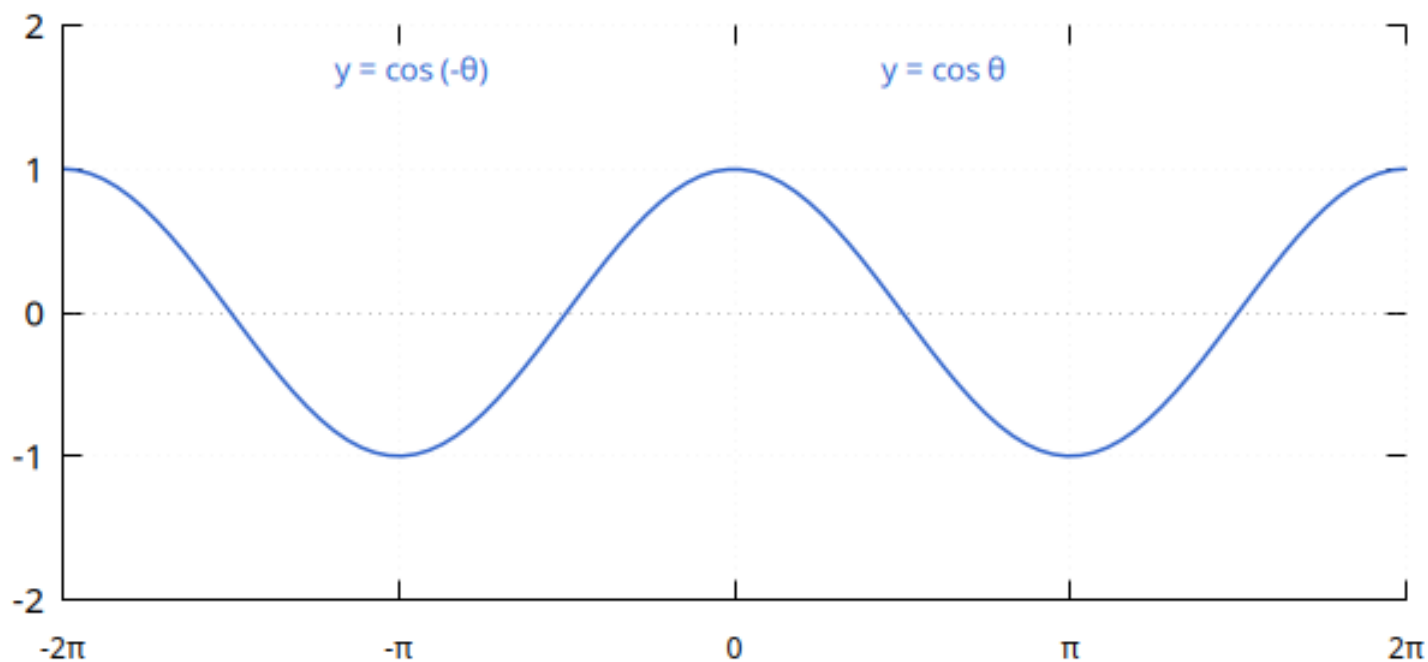
Table 3. Identités de transformation

$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
---	---

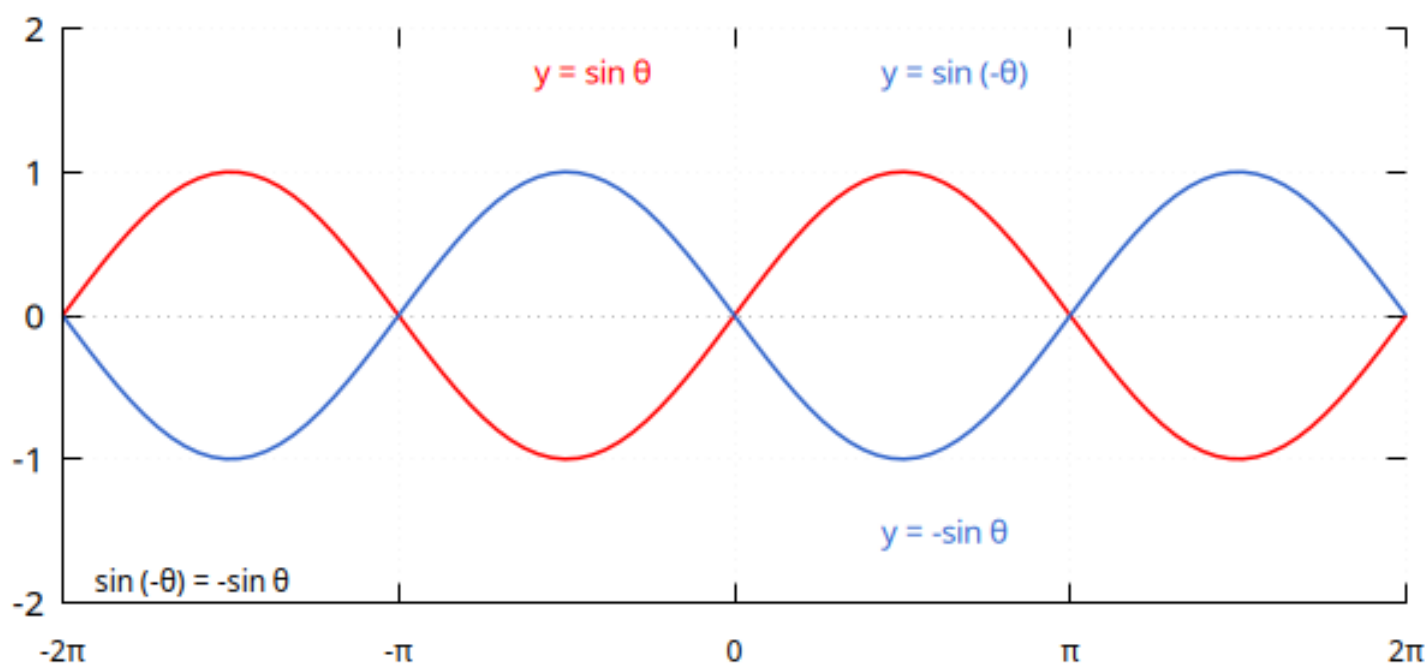
Partie 3 : Identités des fonctions paires/impaires

Rappelons que $\cos x$ est une fonction **paire**. Réfléchir son graphique par rapport à l'axe des y donne deux fonctions

équivalentes ayant le même graphique.



$\sin x$ et $\tan x$ sont toutes deux des fonctions **impaires**. Elles ont une symétrie de rotation par rapport à l'origine.



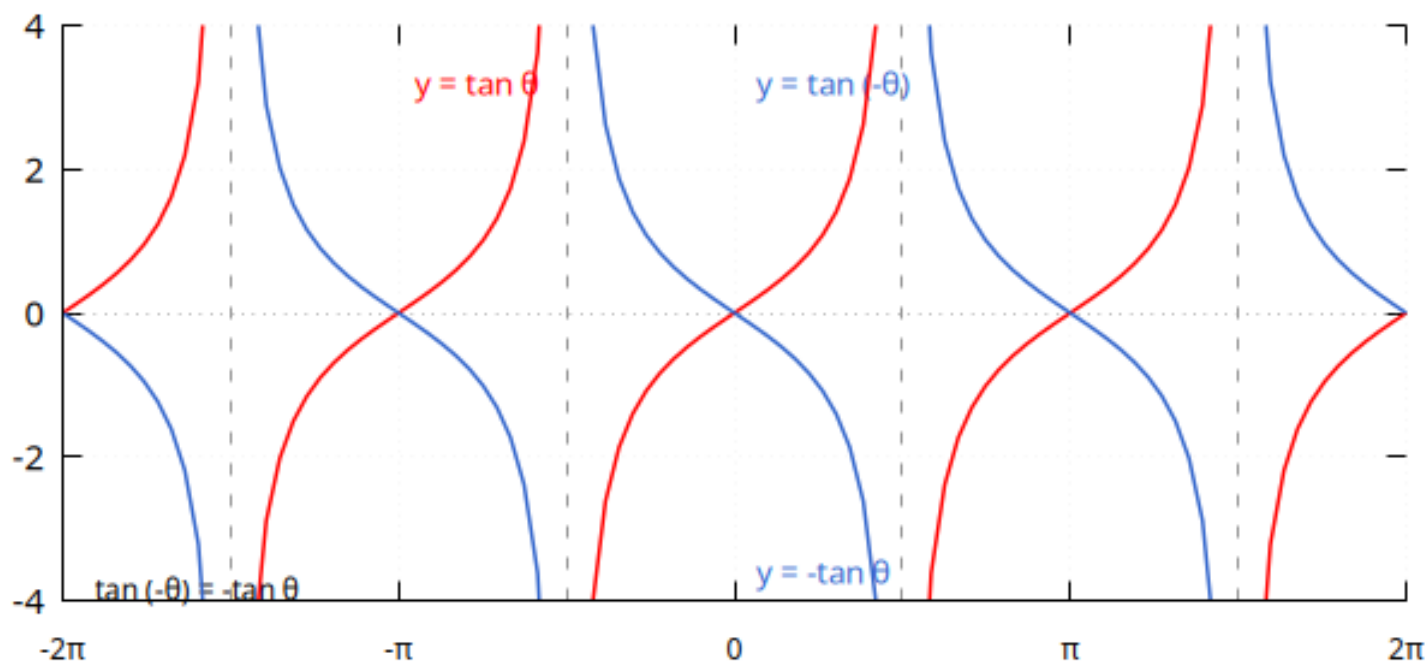


Table 4. Identités paires/impaires

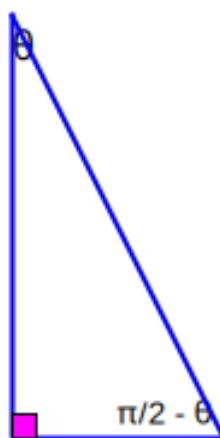
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\tan(-x) = -\tan x$
---------------------	----------------------	----------------------

Partie 4 : Identités de cofonction

Les identités de cofonction décrivent les relations trigonométriques entre des angles complémentaires dans un triangle rectangle.

Table 5. Identités de cofonction

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
---	---



Nous pourrions identifier d'autres expressions trigonométriques équivalentes en comparant des angles principaux

tracés en position standard dans les quadrants II, III et IV avec leur angle aigu associé (angle de référence) dans le quadrant I.

Principe au quadrant II	Principe au quadrant III	Principe au quadrant IV
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(2\pi - x) = -\sin x$

Exemple 2 : Prouver les deux identités de cofonction en utilisant les identités de transformation

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

MG	MD
$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $= \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$ $= \cos\left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$ $= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $= \sin x$	$= \sin x$

MG = MD

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

MG	MD
$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$= \cos x$ $= \cos(-x)$ $= \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$ $= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

MG = MD

Partie 5 : Appliquer les identités

Exemple 3 : Sachant que $\sin \frac{\pi}{5} \cong 0.5878$, utiliser des expressions trigonométriques équivalentes pour évaluer ce qui suit :

a) $\cos \frac{3\pi}{10}$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{3\pi}{10}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\cong 0.5878$$

b) $\cos \frac{7\pi}{10}$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{10}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{7\pi}{10}\right)$$

$$= \sin\left(-\frac{2\pi}{10}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\cong -0.5878$$