

5.3 Transformations des fonctions trigonométriques – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Propriétés des transformations

Pour une fonction sinus ou cosinus transformée de la forme $y = a \sin[k(x - d)] + c$ ou $y = a \cos[k(x - d)] + c$, chaque paramètre affecte le graphique de la façon suivante :

a	k	d	c
amplitude = $ a $; si $a < 0$, le graphique est refléchi par rapport à l'axe des x	période = $\frac{2\pi}{ k }$; si $k < 0$, le graphique est refléchi par rapport à l'axe des y	déphasage; le graphique se déplace de d unités vers la droite (si $d > 0$) ou vers la gauche (si $d < 0$)	déplacement vertical; le graphique se déplace de c unités vers le haut (si $c > 0$) ou vers le bas (si $c < 0$)

Exemple 1 : Pour la fonction $y = 3 \sin\left[\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right] - 1$, détermine l'amplitude, la période, le déphasage, le déplacement vertical, le maximum et le minimum.

Amplitude : $ a = 3$	Période : $\frac{2\pi}{ k } = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
Déphasage : $\frac{\pi}{3}$ vers la gauche	Déplacement vertical : 1 vers le bas
Max : $c + a = -1 + 3 = 2$	Min : $c - a = -1 - 3 = -4$

Partie 2 : Étant donné l'équation, représenter graphiquement la fonction

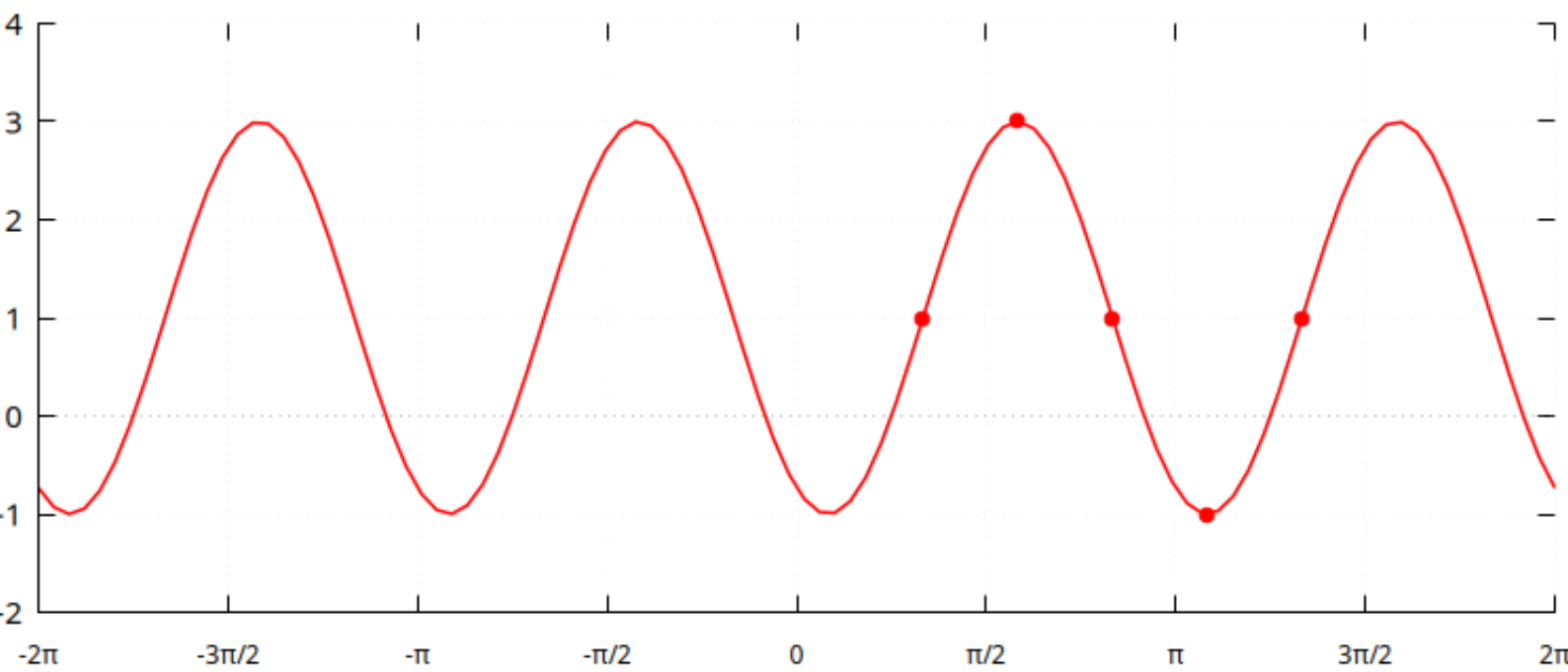
Pour représenter graphiquement une fonction sinus ou cosinus transformée, applique les transformations aux points clés de la fonction mère $y = \sin x$ ou $y = \cos x$.

Exemple 2 : Représente graphiquement $y = 2 \sin[2(x - \frac{\pi}{3})] + 1$ à l'aide des transformations.

x	$y = \sin x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$	$2y + 1$
$\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{7\pi}{12}$	3
$\frac{5\pi}{6}$	1
$\frac{13\pi}{12}$	-1
$\frac{4\pi}{3}$	1

Amplitude = 2; Période = π radians

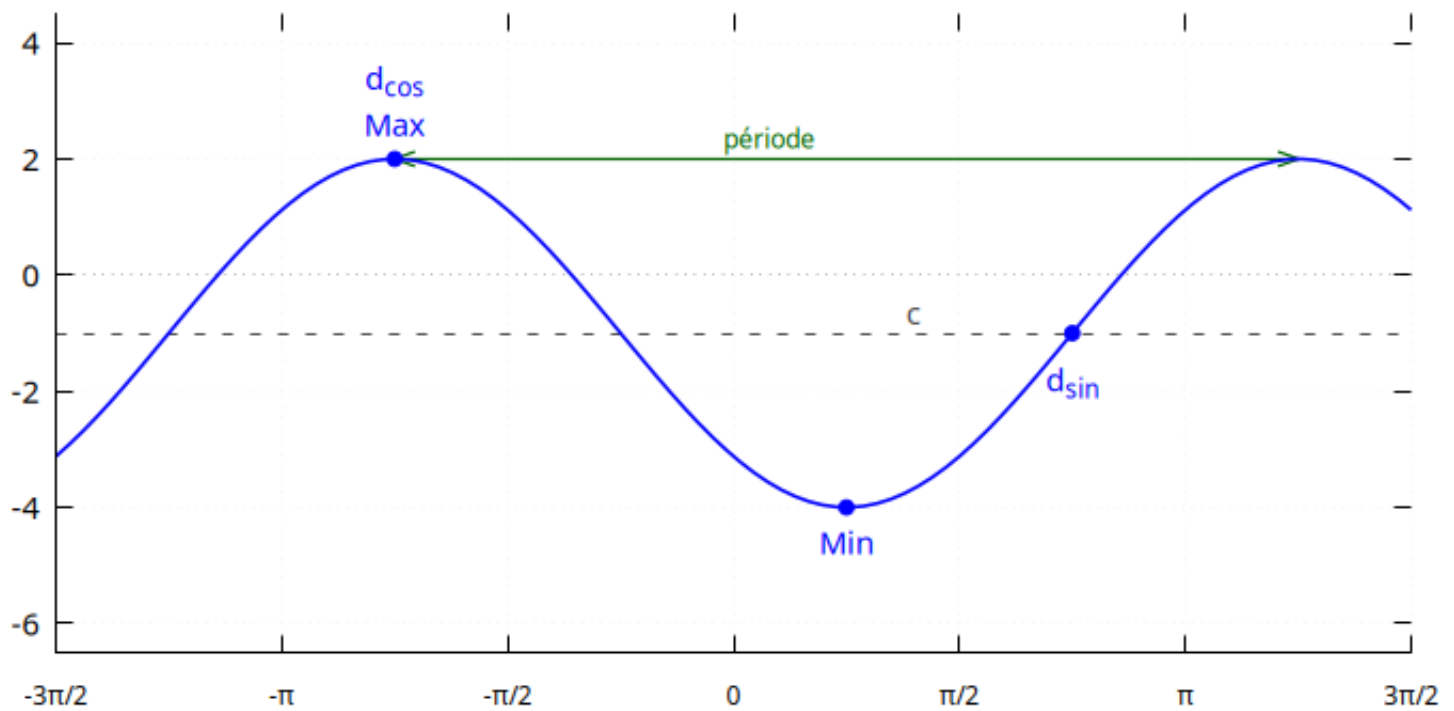


Partie 3 : Étant donné le graphique, écrire l'équation

Pour trouver l'équation d'une fonction sinus ou cosinus transformée à partir de son graphique, utilise les relations suivantes :

a	k	d	c
$a = \frac{\text{max} - \text{min}}{2}$	$k = \frac{2\pi}{\text{période}}$, trouvé à partir du début et de la fin d'un cycle	$d_{\sin} = d_{\cos} - \frac{\pi}{2k}$ est l'abscisse d'un point où le graphique croise la ligne médiane en augmentant; $d_{\cos} = d_{\sin} + \frac{\pi}{2k}$ est l'abscisse d'un maximum	$c = \text{max} - a $, ou de façon équivalente $c = \frac{\text{max} + \text{min}}{2}$

Exemple 3 : Détermine une équation sinus et une équation cosinus pour la fonction montrée dans le graphique.



$$a = \frac{\text{max} - \text{min}}{2} = \frac{2 - (-4)}{2} = 3$$

$$k = \frac{2\pi}{\text{période}} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$c = \text{max} - |a| = 2 - 3 = -1$$

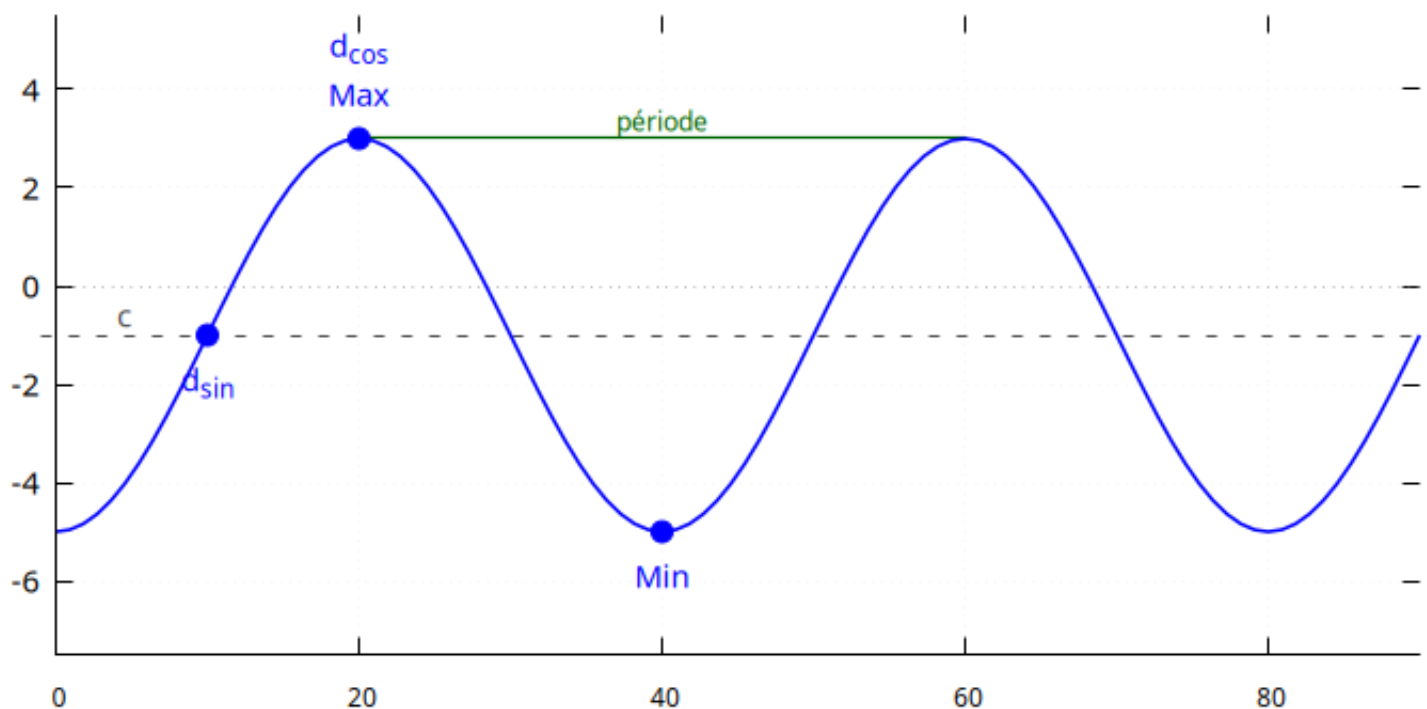
$$d_{\cos} = -\frac{3\pi}{4} \text{ (lu à partir du graphique)}$$

$$d_{\sin} = \frac{3\pi}{4} \text{ (lu à partir du graphique)}$$

$$y = 3 \sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) - 1$$

$$y = 3 \cos \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) - 1$$

Exemple 4 : Détermine une équation sinus et une équation cosinus pour la fonction montrée dans le graphique.



$$a = \frac{\max - \min}{2} = \frac{3 - (-5)}{2} = 4$$

$$k = \frac{2\pi}{\text{période}} = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$$

$$c = \max - |a| = 3 - 4 = -1$$

$$d_{\cos} = 20 \text{ (lu à partir du graphique)}$$

$$d_{\sin} = 10 \text{ (lu à partir du graphique)}$$

$$y = 4 \cos \left[\frac{\pi}{20}(x - 20) \right] - 1$$

$$y = 4 \sin \left[\frac{\pi}{20}(x - 10) \right] - 1$$

Exemple 5 :

a) Crée une fonction sinus avec une amplitude de 7, une période de π , un déphasage de $\frac{\pi}{4}$ vers la droite, et un déplacement vertical de 3 vers le bas.

$$a = 7$$

$$k = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$c = -3$$

$$d = \frac{\pi}{4}$$

$$y = 7 \sin \left[2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] - 3$$

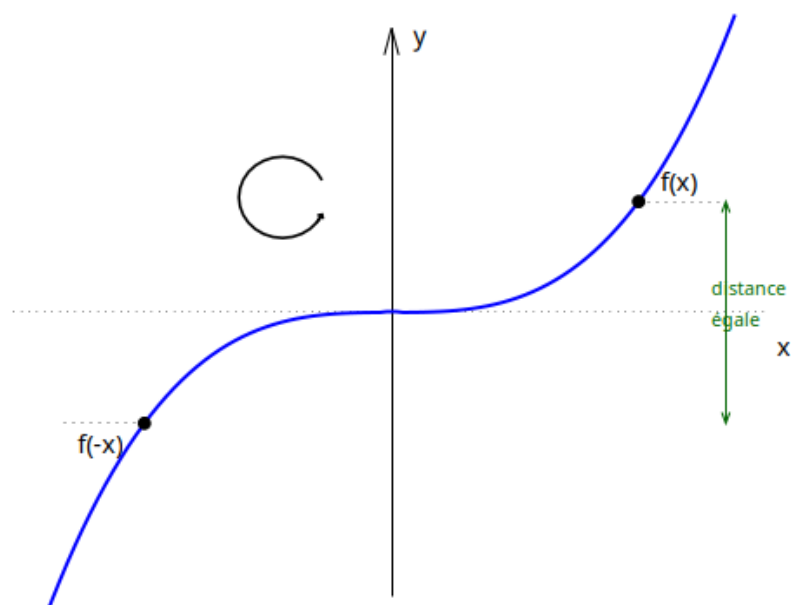
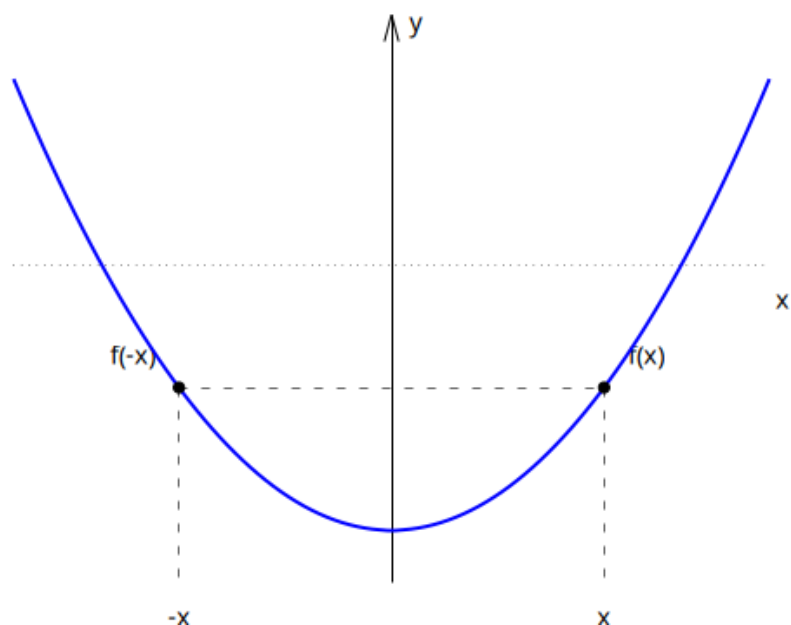
b) Convertis cette fonction en une équation cosinus équivalente.

$$d_{\cos} = d_{\sin} + \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

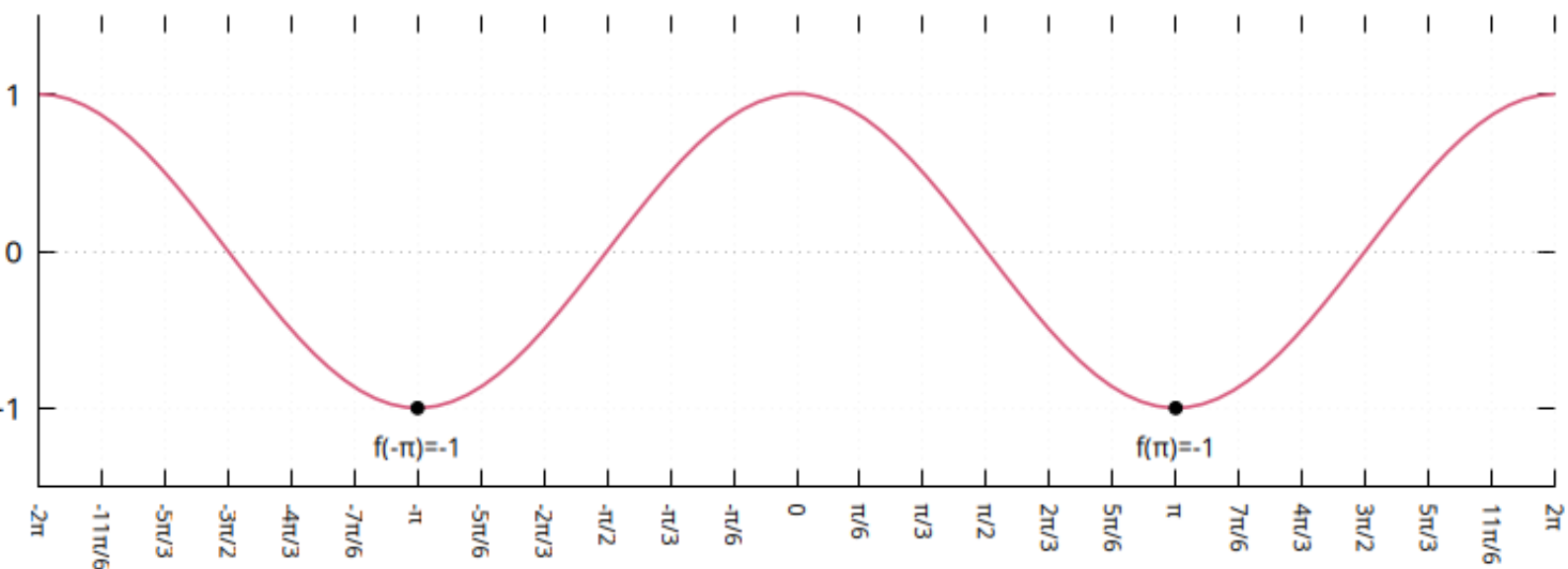
$$y = 7 \cos \left[2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] - 3$$

Partie 4 : Fonctions paires et impaires

Fonctions paires	Fonctions impaires
Symétrie par rapport à l'axe des y	Symétrie par rapport à l'origine (0,0)
Règle : $f(-x) = f(x)$	Règle : $-f(x) = f(-x)$



Exemple : $y = \cos(x)$ est une fonction paire.

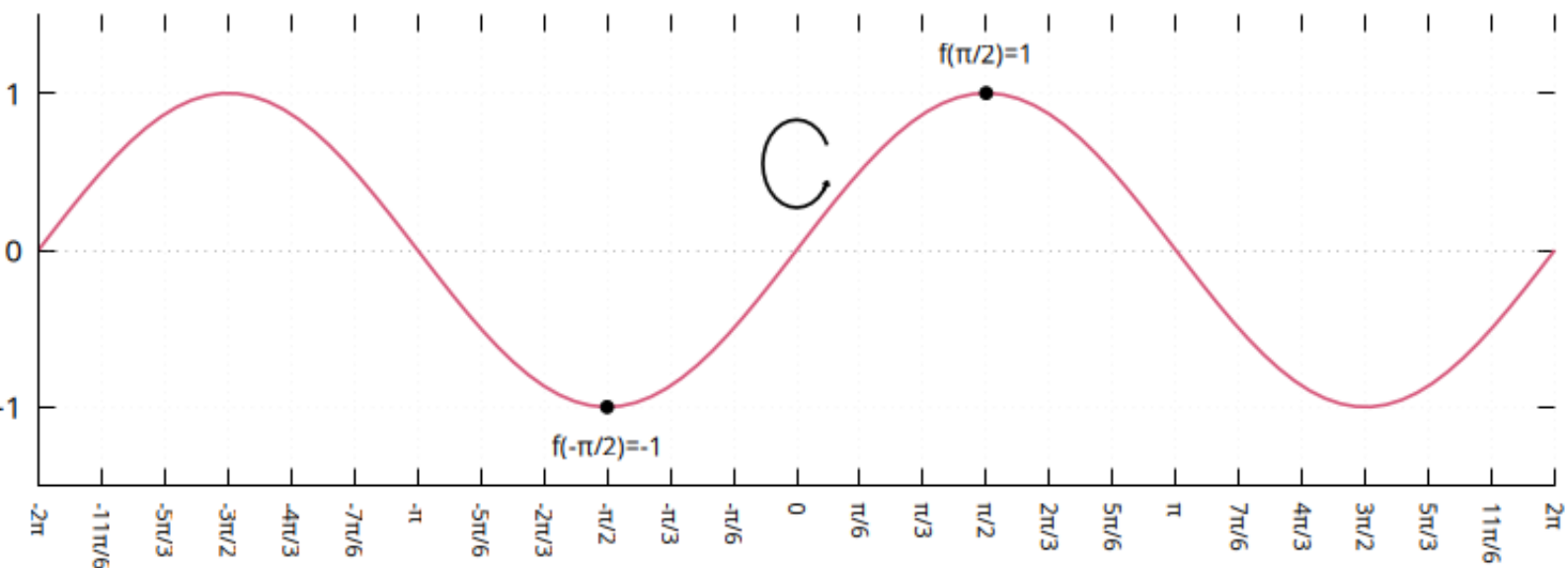


$$f(\pi) = -1$$

$$f(-\pi) = -1$$

Donc, $f(\pi) = f(-\pi)$

Exemple : $y = \sin(x)$ est une fonction impaire.



$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Donc, $-f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$y = \tan(x)$ est aussi une fonction impaire.

