

5.1/5.2 Représentation graphique des fonctions trigonométriques – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Rappel du cercle trigonométrique

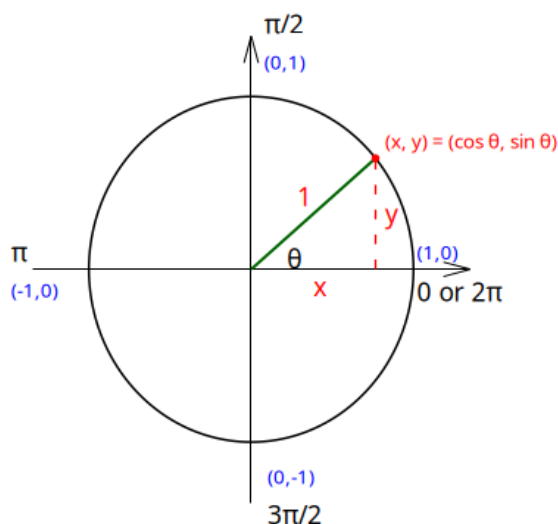
Le cercle trigonométrique est un cercle centré à l'origine et ayant un rayon de **1 unité**. Sur le cercle trigonométrique, les fonctions sinus et cosinus prennent une forme simple :

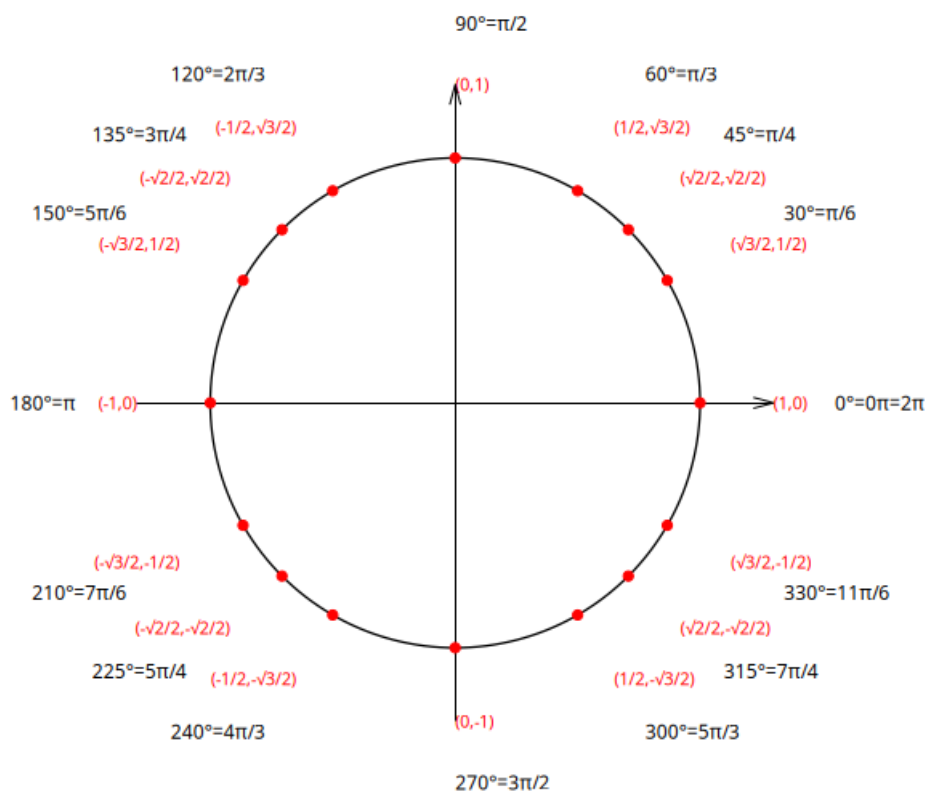
$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

La valeur de $\sin \theta$ est l'**ordonnée** de chaque point sur le cercle trigonométrique

La valeur de $\cos \theta$ est l'**abscisse** de chaque point sur le cercle trigonométrique





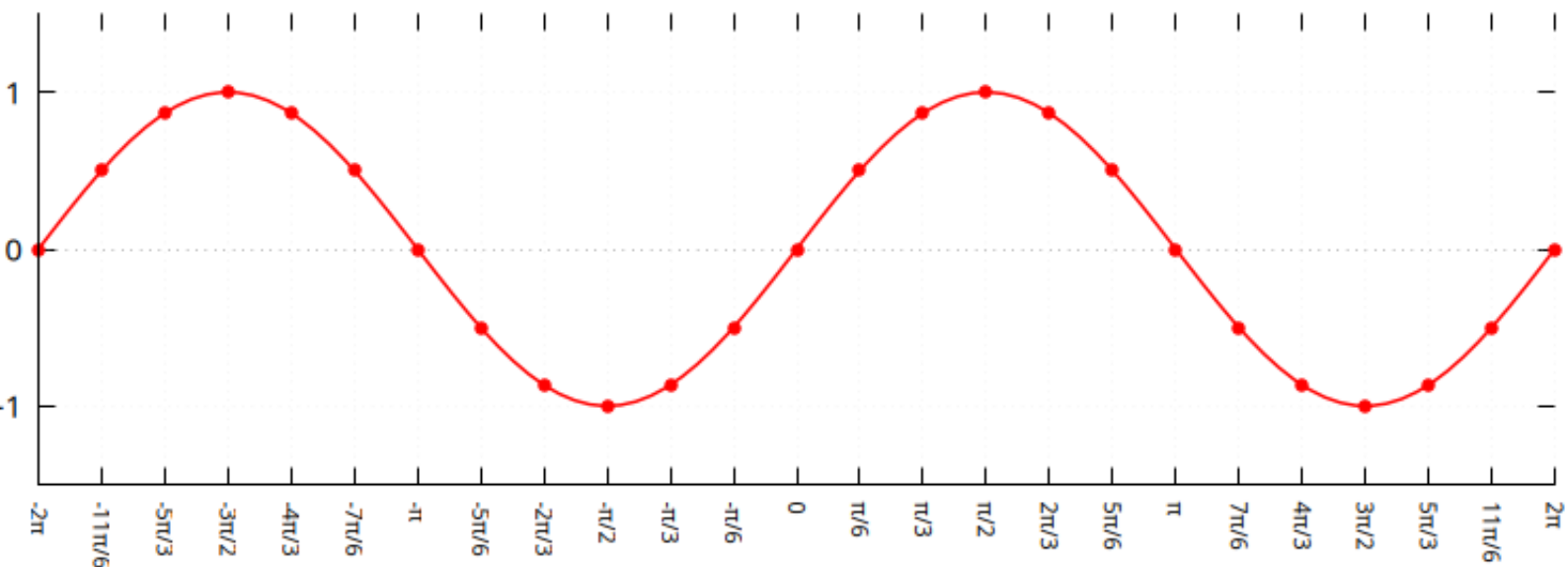
Partie 2 : Représentation graphique du sinus et du cosinus

Pour représenter graphiquement le sinus et le cosinus, nous utiliserons un plan cartésien dont les valeurs de x sont des angles.

Exemple 1 : Complète le tableau de valeurs suivant pour la fonction $f(x) = \sin(x)$. Utilise les triangles spéciaux, le cercle trigonométrique, ou une calculatrice pour trouver les valeurs de la fonction à des intervalles de $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ radian.

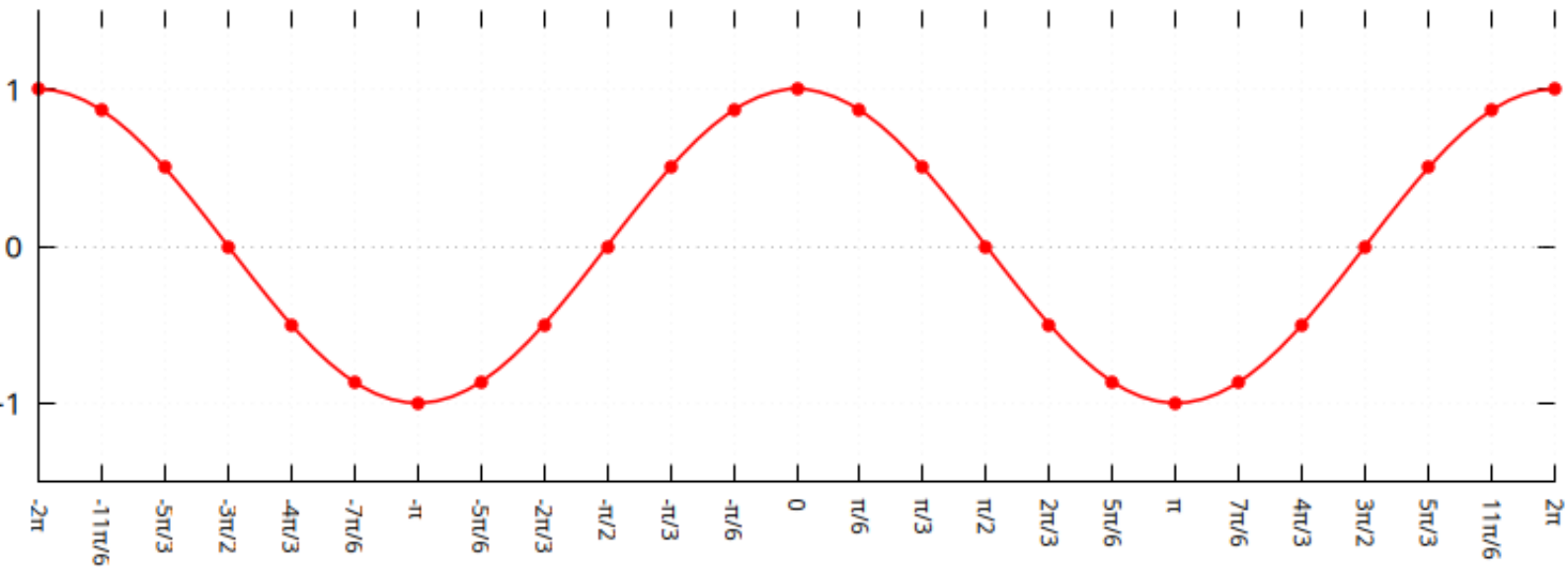
x	$\sin x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.87$
$\frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$	1
$\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.87$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{6\pi}{6} = \pi$	0
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cong -0.87$
$\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$	-1

$\frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cong -0.87$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{12\pi}{6} = 2\pi$	0



Exemple 2 : Complète le tableau de valeurs suivant pour la fonction $f(x) = \cos(x)$. Utilise les triangles spéciaux, le cercle trigonométrique, ou une calculatrice pour trouver les valeurs de la fonction à des intervalles de $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ radian.

x	$\cos x$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.87$
$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$	0
$\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cong -0.87$
$\frac{6\pi}{6} = \pi$	-1
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cong -0.87$
$\frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.87$
$\frac{12\pi}{6} = 2\pi$	1



Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Domaine : $\{x \in \mathbb{R}\}$

Image : $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

Période : 2π radians

Amplitude : $\frac{\max - \min}{2} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$

PÉRIODE : la longueur horizontale d'un cycle sur un graphique.

AMPLITUDE : la moitié de la distance entre les valeurs maximale et minimale d'une fonction périodique.

Partie 3 : Représentation graphique de la fonction tangente

Rappel : $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

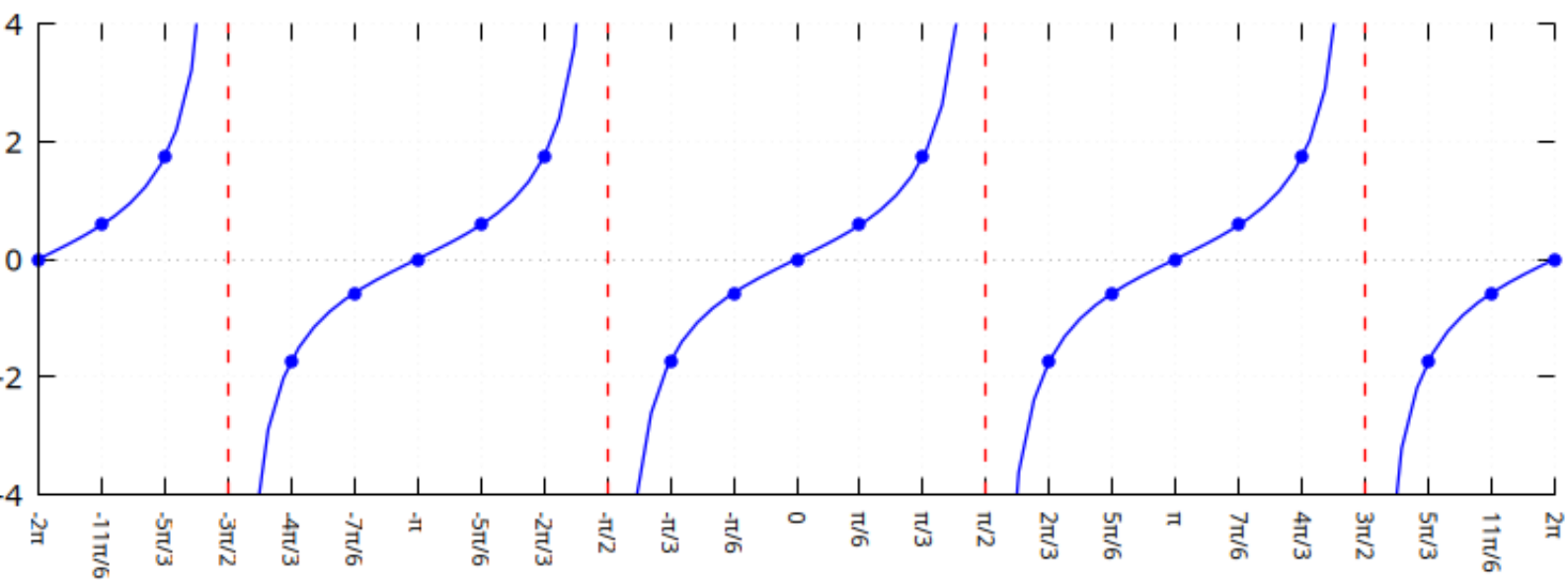
Remarque : Puisque $\cos \theta$ est au dénominateur, chaque fois que $\cos \theta = 0$, $\tan \theta$ sera indéfini, ce qui mènera à une asymptote verticale.

Puisque $\sin \theta$ est au numérateur, chaque fois que $\sin \theta = 0$, $\tan \theta$ sera égal à 0, ce qui sera un zéro de la fonction.

Exemple 3 : Complète le tableau de valeurs suivant pour la fonction $f(x) = \tan(x)$. Utilise l'identité du quotient pour trouver les valeurs de y .

x	$\tan x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.58$
$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3} \cong 1.73$
$\frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$	non défini
$\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3} \cong -1.73$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} \cong -0.58$
$\frac{6\pi}{6} = \pi$	0
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.58$
$\frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$	$\sqrt{3} \cong 1.73$

$\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$	non défini
$\frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$	$-\sqrt{3} \cong -1.73$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} \cong -0.58$
$\frac{12\pi}{6} = 2\pi$	0



Propriétés de la fonction tangente

Domaine : $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi + 2k\pi}{2}\}$ où $k \in \mathbb{Z}$

Image : $\{y \in \mathbb{R}\}$

Période : π radian

Amplitude : aucune (pas de maximum ni de minimum)

Partie 4 : Représentation graphique des fonctions trigonométriques réciproques

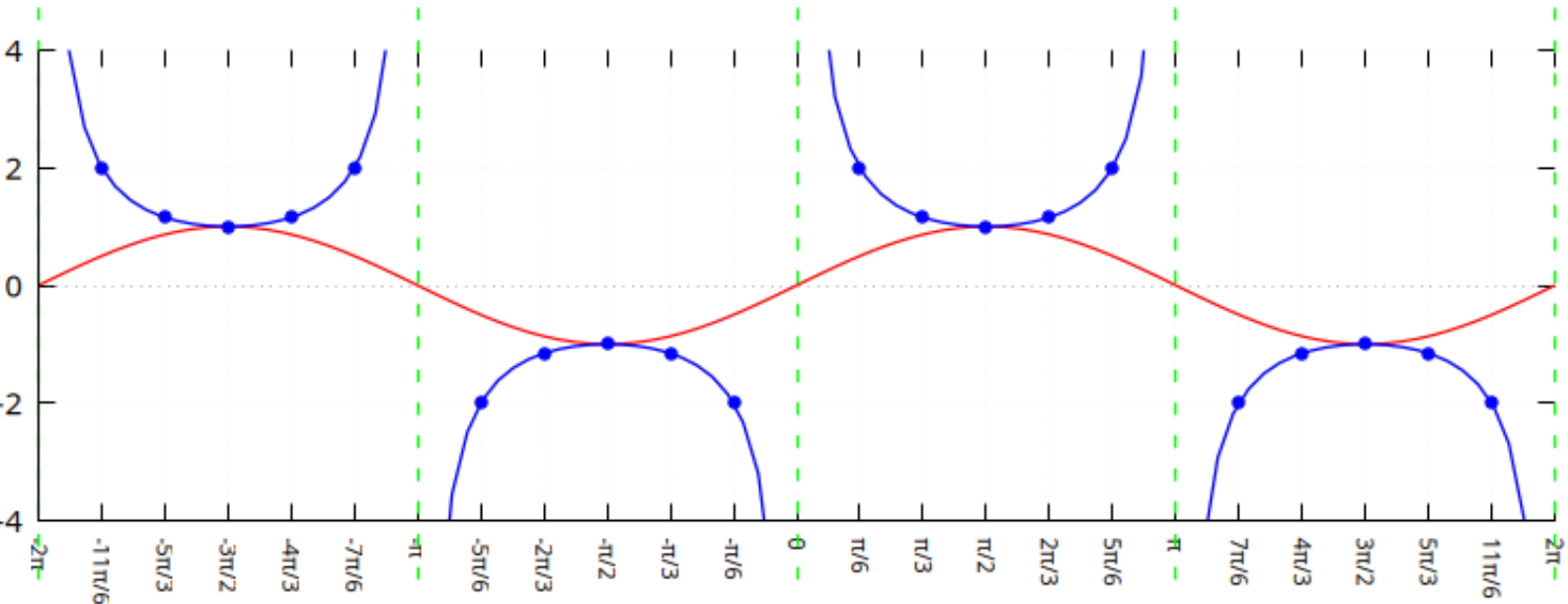
Le graphique d'une fonction trigonométrique réciproque est lié au graphique de sa fonction trigonométrique primaire correspondante de la façon suivante :

- La réciproque a une asymptote verticale à chaque zéro de sa fonction trigonométrique primaire
- La réciproque a un zéro à chaque asymptote verticale de sa fonction trigonométrique primaire
- Les intervalles de signe positif/négatif sont les mêmes, mais les intervalles de croissance/décroissance sont inversés
- Les valeurs de y égales à 1 et -1 ne changent pas, et c'est donc là que la réciproque et la fonction primaire se croisent
- Les points de minimum local de la fonction primaire deviennent des points de maximum local de la réciproque, et vice versa.

Exemple 4 : Complète le tableau de valeurs suivant pour la fonction $f(x) = \csc(x)$. Utilise l'identité réciproque pour trouver les valeurs de y .

x	$\csc x$
0	non défini

$\frac{\pi}{6}$	2
$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \cong 1.15$
$\frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$	1
$\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \cong 1.15$
$\frac{5\pi}{6}$	2
$\frac{6\pi}{6} = \pi$	NON DÉFINI
$\frac{7\pi}{6}$	-2
$\frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}} \cong -1.15$
$\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}} \cong -1.15$
$\frac{11\pi}{6}$	-2
$\frac{12\pi}{6} = 2\pi$	non défini



Propriétés de la fonction cosécante

Domaine : $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ où $k \in \mathbb{Z}$

Image : $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$

Période : 2pi radians

Amplitude : aucune (pas de maximum ni de minimum)

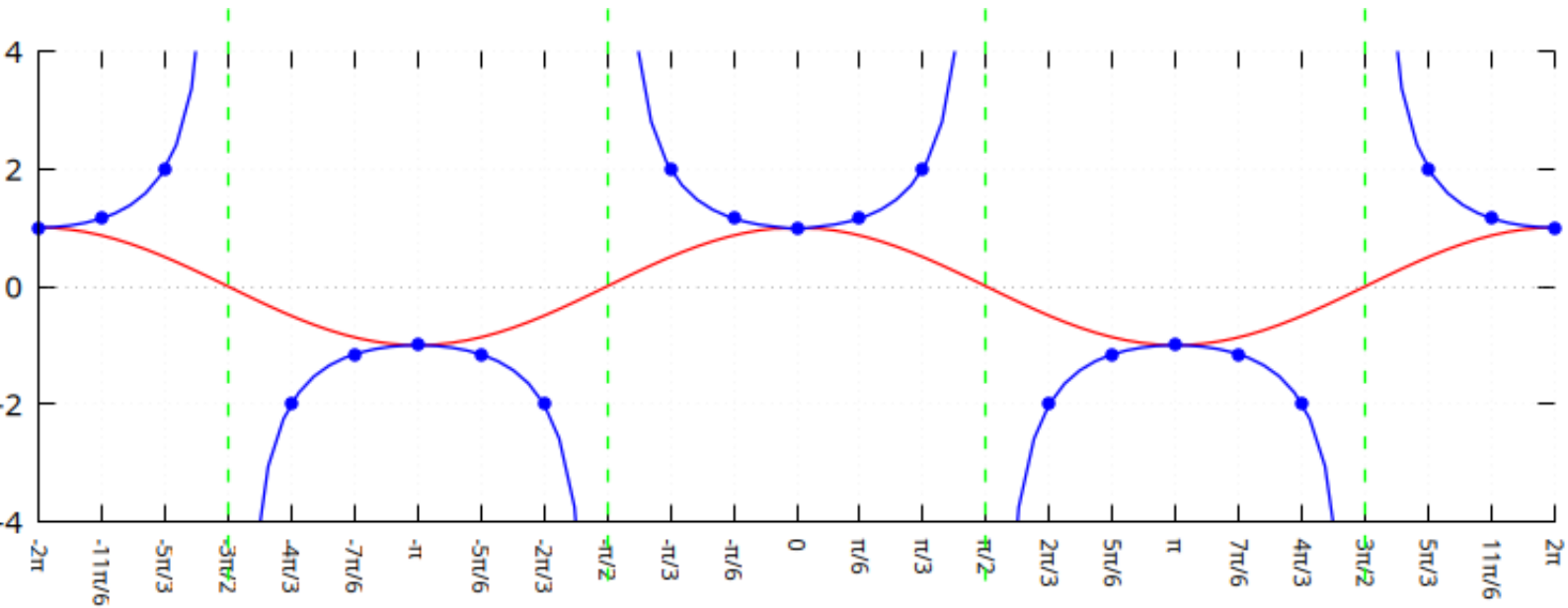
Identités réciproques

$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

Exemple 5 : Complète le tableau de valeurs suivant pour la fonction $f(x) = \sec(x)$. Utilise l'identité réciproque pour trouver les valeurs de y.

x	sec x
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \cong 1.15$

$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$	2
$\frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$	non défini
$\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$	-2
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}} \cong -1.15$
$\frac{6\pi}{6} = \pi$	-1
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}} \cong -1.15$
$\frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$	-2
$\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$	non défini
$\frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$	2
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \cong 1.15$
$\frac{12\pi}{6} = 2\pi$	1



Propriétés de la fonction sécante

Domaine : $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi+2k\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$

Image : $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$

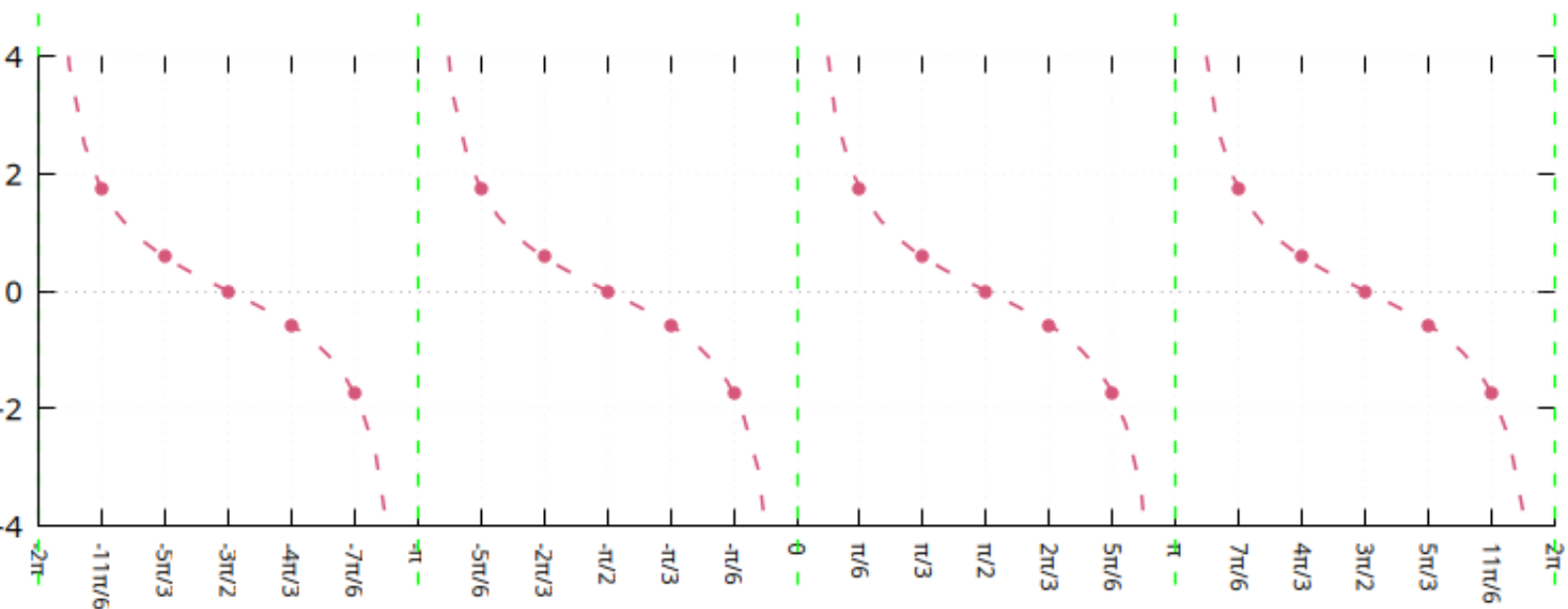
Période : 2pi radians

Amplitude : aucune (pas de maximum ni de minimum)

Exemple 6 : Complète le tableau de valeurs suivant pour la fonction $f(x) = \cot(x)$. Utilise l’identité réciproque pour trouver les valeurs de y .

x	$\cot x$
0	non défini
$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3} \cong 1.73$
$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.58$
$\frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$	0
$\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} \cong -0.58$

$\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3} \cong -1.73$
$\frac{6\pi}{6} = \pi$	non défini
$\frac{7\pi}{6}$	$\sqrt{3} \cong 1.73$
$\frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.58$
$\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} \cong -0.58$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\sqrt{3} \cong -1.73$
$\frac{12\pi}{6} = 2\pi$	non défini



Propriétés de la fonction cotangente

Domaine : $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ où $k \in \mathbb{Z}$

Image : $\{y \in \mathbb{R}\}$

Période : π radian

Amplitude : aucune (pas de maximum ni de minimum)