

4.1 Mesure en radians – Leçon avec solutions

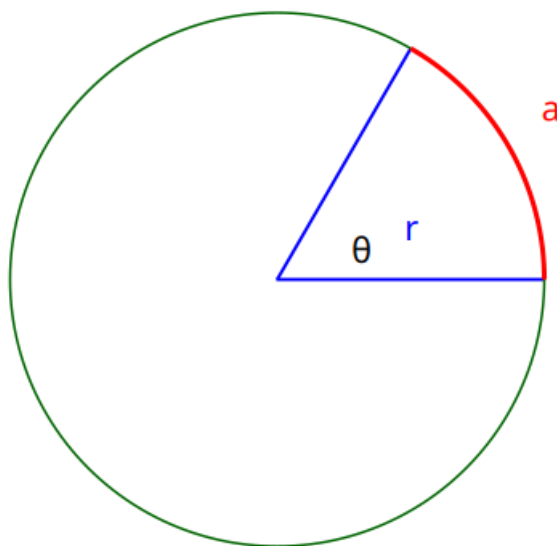
Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

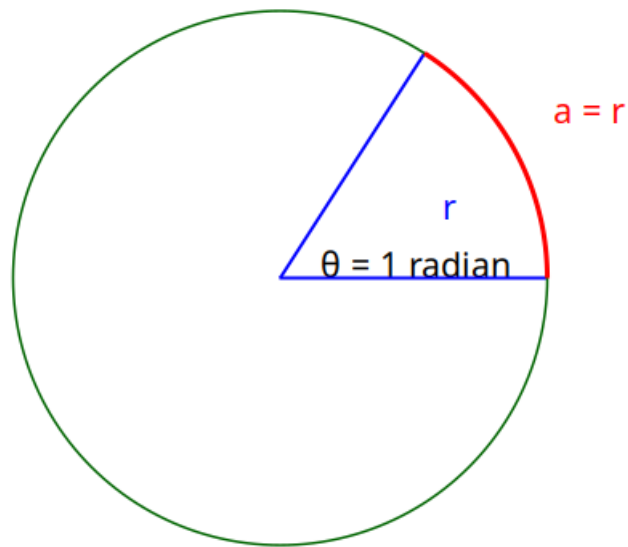
Partie 1 : Qu'est-ce qu'un radian?

Les angles sont habituellement mesurés en **degrés**. Cependant, en mathématiques et en physique, il existe de nombreuses applications où il est plus pratique d'exprimer un angle comme un nombre pur, sans unité, plutôt qu'en degrés.

Lorsqu'on mesure en **radians**, la taille d'un angle est exprimée en fonction de la longueur d'un arc, a , qui sous-tend l'angle, θ , où $\theta = \frac{a}{r}$.



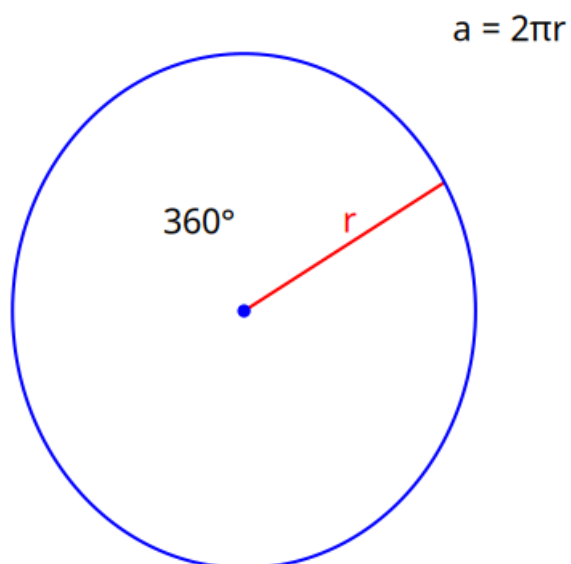
1 radian est défini comme la taille d'un angle sous-tendu par un arc dont la longueur est **égale au rayon** du cercle. Ainsi, lorsque la longueur de l'arc et le rayon sont égaux, $\theta = \frac{a}{r} = \frac{r}{r} = 1 \text{ radian}$



Combien y a-t-il de radians dans un cercle complet? Autrement dit, combien de fois un arc de longueur égale au rayon peut-il tenir sur la circonférence d'un cercle?

Rappel : $C = 2\pi r$

Donc, si on utilise la circonférence complète du cercle comme longueur d'arc, $\theta = \frac{a}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radians}$



Partie 2 : Convertir entre les degrés et les radians

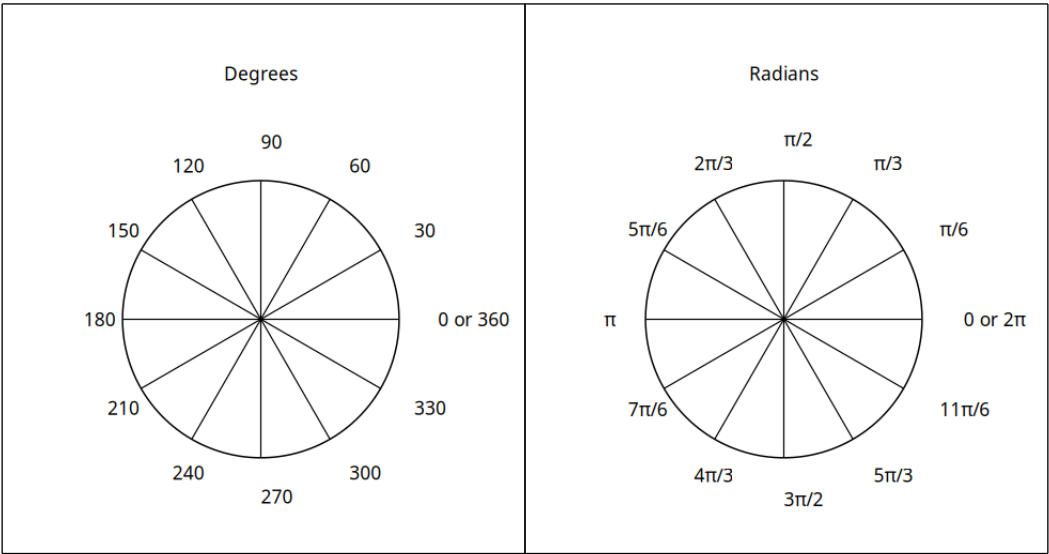
La relation clé qu’il faut connaître pour convertir entre les degrés et les radians est :

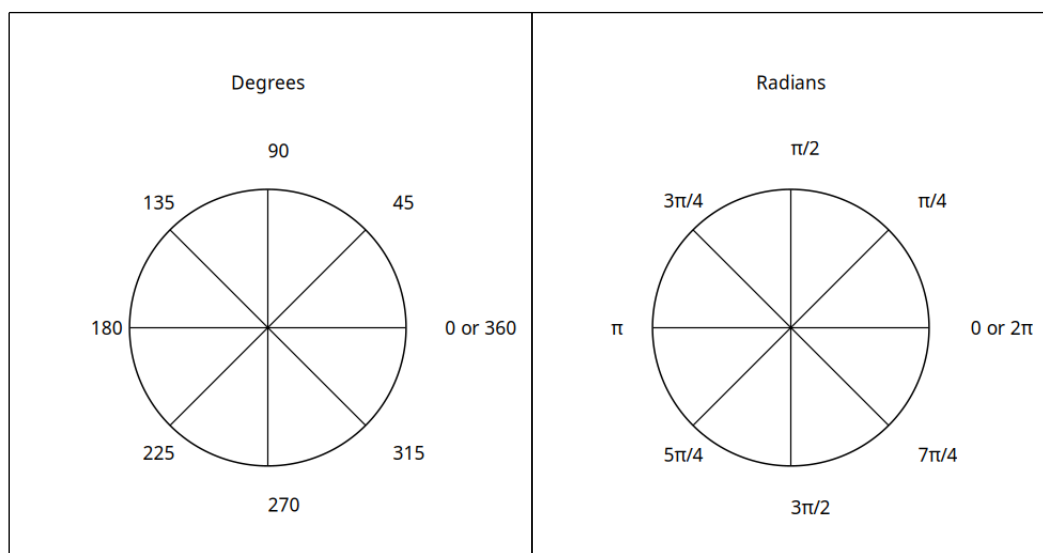
$360^\circ = 2\pi \text{ radians}$

$1 \text{ degré} = \frac{\pi}{180} \text{ radian}$ Pour convertir des degrés aux radians, multiplie par $\frac{\pi}{180}$	$1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ degrés}$ Pour convertir des radians aux degrés, multiplie par $\frac{180}{\pi}$
--	---

Exemple 1 : Convertis d’abord les mesures en degrés suivantes, qui sont courantes, en radians

- a) 180°
$$180^\circ = 180^\circ \times \frac{\pi}{180}$$
$$= \pi \text{ radians}$$
- b) 90°
$$90^\circ = 90^\circ \times \frac{\pi}{180}$$
$$= \frac{\pi}{2} \text{ radians}$$
- c) 60°
$$60^\circ = 60^\circ \times \frac{\pi}{180}$$
$$= \frac{\pi}{3} \text{ radians}$$
- d) 45°
$$45^\circ = 45^\circ \times \frac{\pi}{180}$$
$$= \frac{\pi}{4} \text{ radians}$$
- e) 30°
$$30^\circ = 30^\circ \times \frac{\pi}{180}$$
$$= \frac{\pi}{6} \text{ radians}$$
- f) 1°
$$1^\circ = 1^\circ \times \frac{\pi}{180}$$
$$= \frac{\pi}{180} \text{ radians}$$





Exemple 2 : Convertis chacune des mesures en degrés suivantes en mesures en radians

a) 225°

$$\begin{aligned} 225^\circ &= 225^\circ \times \frac{\pi}{180} \\ &= \frac{5\pi}{4} \text{ radians} \end{aligned}$$

b) 80°

$$\begin{aligned} 80^\circ &= 80^\circ \times \frac{\pi}{180} \\ &= \frac{4\pi}{9} \text{ radians} \end{aligned}$$

c) 450°

$$\begin{aligned} 450^\circ &= 450^\circ \times \frac{\pi}{180} \\ &= \frac{5\pi}{2} \text{ radians} \end{aligned}$$

Exemple 3 : Convertis chacune des mesures en radians suivantes en mesures en degrés

a) $\frac{2\pi}{3}$ radians

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{3} \text{ radians} &= \frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} \\ &= 120^\circ \end{aligned}$$

b) $\frac{9\pi}{4}$ radians

$$\begin{aligned} \frac{9\pi}{4} \text{ radians} &= \frac{9\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} \\ &= 405^\circ \end{aligned}$$

c) 1 radian

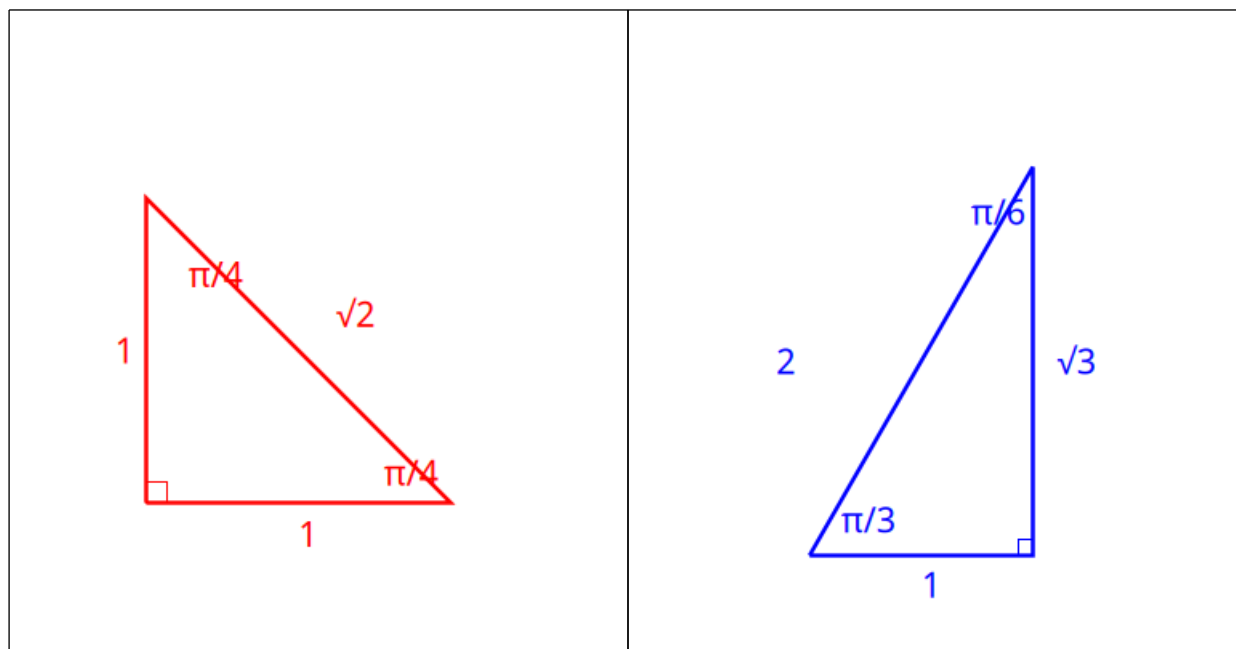
$$\begin{aligned} 1 \text{ radian} &= 1 \times \frac{180}{\pi} \\ &= 57.296^\circ \end{aligned}$$

Partie 3 : Application

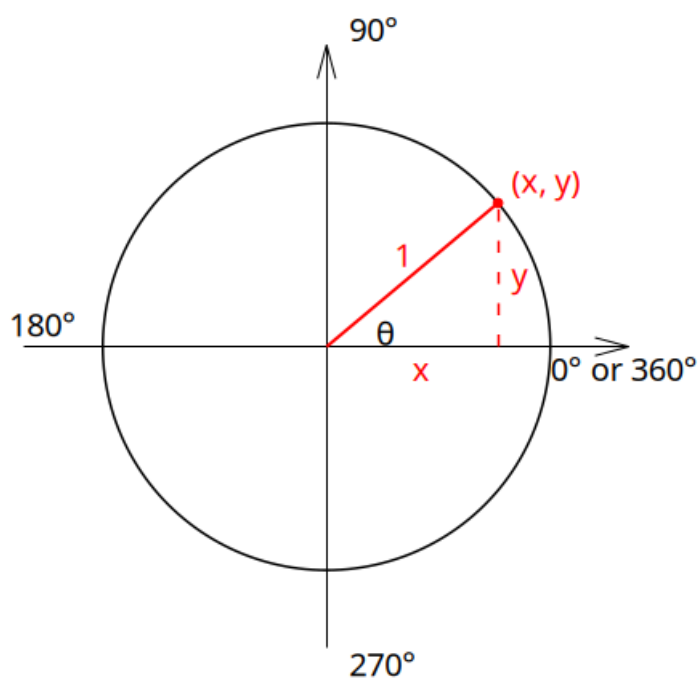
Exemple 4 : Suzette choisit un chameau pour faire un tour de carrousel. Le chameau est situé à 9 m du centre du carrousel. Si le carrousel tourne d'un angle de $\frac{5\pi}{6}$, détermine la longueur de l'arc parcouru par le chameau, au dixième de mètre près.

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{a}{r} \\ a &= \theta r \\ a &= \frac{5\pi}{6} (9) \\ a &\cong 23.6 \text{ m} \end{aligned}$$

Partie 4 : Triangles spéciaux utilisant les mesures en radians



De plus, tu devras te rappeler du CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE, qui est un cercle ayant un rayon de 1. Utilise le cercle trigonométrique pour écrire des expressions pour $\sin \theta$, $\cos \theta$, et $\tan \theta$ en fonction de x , y , et r .



Sur le cercle trigonométrique, les fonctions sinus et cosinus prennent une forme simple :

$$\sin \theta = y$$

$$\cos \theta = x$$

La valeur de $\sin \theta$ est l'ordonnée de chaque point sur le cercle trigonométrique

La valeur de $\cos \theta$ est l'abscisse de chaque point sur le cercle trigonométrique

Ainsi, on peut utiliser les points où le bras terminal coupe le cercle trigonométrique pour obtenir les rapports sinus et cosinus simplement en regardant les coordonnées x et y des points.

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Exemple 5 : Remplis le tableau des rapports à l'aide des triangles spéciaux et du cercle trigonométrique

	$0, 2\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non défini	0	non défini