

3.6 Applications des logarithmes et des exponentielles dans les sciences physiques – Feuille de travail avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Formules exponentielles

Générale	Demi-vie	Doublement
$A(t) = A_0(1 + i)^t$	$A(t) = A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{H}}$	$A(t) = A_0(2)^{\frac{t}{D}}$
i est le pourcentage de croissance (+) ou de décroissance (-)	H est la période de demi-vie	D est la période de doublement

Formules logarithmiques

pH	Décibel	Richter
$pH = -\log[H^+]$	$\beta_2 - \beta_1 = 10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$	$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$
pH est l'acidité et $[H^+]$ est la concentration d'ions hydronium en mol/L	β est le volume sonore en dB et I est l'intensité du son en W/m^2	M est la magnitude mesurée en richters, I est l'intensité

1) La demi-vie d'une forme radioactive de tritium est d'environ 2 ans. Combien resterait-il d'un échantillon de 5 kg de cette matière après ...

a) 8 ans

$$A(8) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{2}}$$

$$A(8) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$A(8) = \frac{5}{16}$$

$$A(8) = 0.3125 \text{ kg}$$

b) 12 mois

12 mois = 1 an

$$A(1) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$A(1) \cong 3.536 \text{ kg}$$

2) La population de Littleton est actuellement (2014) de 23 000, et augmente de façon exponentielle avec un taux de croissance de 2 % par an. Estime quand Littleton aura une population de 30 000.

$$30\,000 = 23\,000(1.02)^t$$

$$\frac{30}{23} = (1.02)^t$$

$$t = \log_{1.02}\left(\frac{30}{23}\right)$$

$$t = \frac{\log\left(\frac{30}{23}\right)}{\log 1.02}$$

$$t \cong 13.42 \text{ ans}$$

3) La population d'hirondelles noires du parc Algonquin était estimée à 35 000 en 1992. Dix ans plus tard, en 2002, la population était passée à 44 400.

a) Quel est le taux de croissance annuel de la population d'hirondelles noires?

$$44\,400 = 35\,000(b)^{10}$$

$$\frac{222}{175} = (b)^{10}$$

$$\sqrt[10]{\frac{222}{175}} = b$$

$$b \cong 1.024$$

Le taux de croissance est d'environ 2.4 % par année.

b) Estime la population pour 2010, à la centaine près.

$$\begin{aligned}A(8) &= 44\,400(1 + 0.024)^8 \\A(8) &= 53\,676.3 \\A(8) &\cong 53\,700\end{aligned}$$

4) Après un accident dans une centrale nucléaire, le niveau de radiation dans la centrale était de 950 R (roentgens). Cinq heures plus tard, le niveau était de 800 R. Combien de temps faudra-t-il avant d'atteindre un niveau de radiation sécuritaire, soit moins de 0.01 R?

$$\begin{aligned}800 &= 950(b)^5 \\b &= \sqrt[5]{\frac{800}{950}} \\b &\cong 0.9662 \\0.01 &= 950(0.9662)^t \\\frac{0.01}{950} &= 0.9662^t \\t &= \frac{\log\left(\frac{0.01}{950}\right)}{\log(0.9662)} \\t &\cong 333.3 \text{ heures}\end{aligned}$$

5) La valeur d'une nouvelle mini-fourgonnette chute de 40 % après la première année, puis diminue de façon exponentielle à un taux de 12 % par année par la suite. Quand une mini-fourgonnette achetée neuve pour 35 000 \$ vaudra-t-elle moins de 10 000 \$?

Valeur après 1 an : $35\,000(0.6) = 21\,000$

$$\begin{aligned}A(t) &= A_0(1 - i)^t \\10\,000 &= 21\,000(1 - 0.12)^t \\\frac{10}{21} &= (0.88)^t \\t &= \log_{0.88}\left(\frac{10}{21}\right) \\t &= \frac{\log\left(\frac{10}{21}\right)}{\log(0.88)} \\t &\cong 5.8 \text{ ans}\end{aligned}$$

1 an à 40 %, puis environ 5.8 ans à 12 %; cela signifie qu'il faudrait environ 6.8 ans au total pour que la mini-fourgonnette vaille moins de 10 000 \$.

6) Un fossile de crabe contient 38.6 % de son isotope de carbone-14 d'origine, dont la demi-vie est de 5370 ans. Quel âge a environ ce fossile de crabe?

$$\begin{aligned}A(t) &= A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{H}} \\0.386(A_0) &= A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5370}} \\0.386 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5370}} \\\log(0.386) &= \frac{t}{5370} \log\left(\frac{1}{2}\right) \\\frac{\log(0.386)}{\log(0.5)} &= \frac{t}{5370} \\t &= \frac{5370 \log(0.386)}{\log(0.5)} \\t &\cong 7375 \text{ ans}\end{aligned}$$

7) Un fonds commun de placement Trimark affiche un historique de croissance de 4.2 % par année. Quelle est la période de doublement de cet investissement?

$$\begin{aligned}2 &= 1(1.042)^t \\\log 2 &= \log(1.042)^t \\\log 2 &= t \log(1.042) \\t &= \frac{\log 2}{\log(1.042)} \\t &\cong 16.85 \text{ ans}\end{aligned}$$

8) Un traitement pour aider un patient à cesser de fumer consiste à mâcher de la gomme à la nicotine. Chaque gomme introduit 1.5 mg de nicotine dans le système du patient. La nicotine a une demi-vie de 3 heures. La patiente ressentira l'envie de fumer lorsque le niveau de nicotine dans son système descend sous 0.45 mg. Si elle a mâché une gomme à 8 h 00 et une autre à 10 h 00, à quelle heure ressentira-t-elle de nouveau l'envie de fumer?

Concentration à 10 h 00 :

$$\begin{aligned}A(2) &= 1.5\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\A(2) &\cong 0.94494 \text{ mg}\end{aligned}$$

Ajoute ensuite 1.5 mg pour la nouvelle gomme : $0.94494 + 1.5 = 2.44494$ mg

Quand 2.44494 mg se réduira-t-il à 0.45 mg?

$$0.45 = 2.44494 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{3}}$$

$$0.1840535964 = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{3}}$$

$$\frac{t}{3} = \frac{\log(0.1840535964)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$t = \frac{3 \log(0.1840535964)}{\log(0.5)}$$

$$t \cong 7.3 \text{ heures, soit environ 17 h 18}$$

9) Détermine le pH d'une solution ayant la concentration d'ions hydronium suivante :

a) 0.01

$$pH = -\log(0.01)$$

$$pH = -(-2)$$

$$pH = 2$$

b) 1.5×10^{-10}

$$pH = -\log(1.5 \times 10^{-10})$$

$$pH \cong 9.8$$

10) Détermine la concentration d'ions hydronium, en moles par litre, d'une solution ayant le pH suivant :

a) 8.5

$$8.5 = -\log[H^+]$$

$$-8.5 = \log[H^+]$$

$$[H^+] = 10^{-8.5}$$

$$[H^+] \cong 3.2 \times 10^{-9} \text{ mol/L}$$

b) 3

$$3 = -\log[H^+]$$

$$-3 = \log[H^+]$$

$$[H^+] = 10^{-3}$$

$$[H^+] = 0.001 \text{ mol/L}$$

11) Combien de fois plus intense est le son d'un cri que celui d'un chuchotement?

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

$$80 - 30 = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

$$5 = \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^5$$

Un cri est 100 000 fois plus intense qu'un chuchotement.

12) Une chaîne stéréo de voiture puissante a un niveau sonore de 110 dB. Combien de fois plus intense qu'une chaîne stéréo de voiture est le son d'un haut-parleur de concert rock?

$$150 - 110 = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

$$4 = \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

$$10^4 = \frac{I_2}{I_1}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 10\,000$$

Un haut-parleur de concert rock est 10 000 fois plus intense qu'une chaîne stéréo de voiture.

13) L'intensité sonore d'une épingle qui tombe est environ 1/30 000 de l'intensité sonore d'une conversation normale. Quel est le niveau en décibels d'une épingle qui tombe?

$$\beta_2 - 60 = 10 \log \left(\frac{1}{30\,000} \right)$$

$$\beta_2 = 10 \log \left(\frac{1}{30\,000} \right) + 60$$

$$\beta_2 \cong 15.23 \text{ dB}$$

Le niveau en décibels d'une épingle qui tombe est d'environ 15.23 dB.

14) Le 26 septembre 2001, un tremblement de terre à North Bay, en Ontario, a été 10 000 fois plus intense que I_0 . Quelle a été la mesure de ce tremblement de terre sur l'échelle de Richter?

$$\begin{aligned} M &= \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \\ M &= \log(10\,000) \\ M &= 4 \end{aligned}$$

15) Le 10 février 2000, un tremblement de terre s'est produit à Welland, en Ontario, mesurant 2.3 sur l'échelle de Richter.

a) Combien de fois plus intense était-ce qu'un tremblement de terre standard de faible niveau?

$$\begin{aligned} 2.3 &= \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \\ 10^{2.3} &= \frac{I}{I_0} \\ \frac{I}{I_0} &\cong 199.53 \end{aligned}$$

Environ 200 fois plus intense.

b) Le 22 juillet 2001, un tremblement de terre à St. Catharines a mesuré 1.1 sur l'échelle de Richter. Combien de fois plus intense que le tremblement de terre de St. Catharines était celui de Welland?

$$\begin{aligned} 2.3 - 1.1 &= 1.2 \\ 1.2 &= \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \\ 10^{1.2} &= \frac{I}{I_0} \\ \frac{I}{I_0} &\cong 15.85 \end{aligned}$$

Environ 16 fois (15.85 fois) plus intense.

16) L'échelle de magnitude stellaire compare la luminosité des étoiles à l'aide de l'équation $m_2 - m_1 = \log\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$, où m_2 et m_1 sont la magnitude apparente des deux étoiles comparées (leur luminosité vue dans le ciel) et b_1 et b_2 sont leur luminosité réelle (la quantité de lumière qu'elles émettent réellement). Cette relation ne tient pas compte de la distance des étoiles par rapport à la Terre.

a) Sirius est l'étoile la plus brillante en apparence dans notre ciel, avec une magnitude apparente de -1.5. De combien Sirius paraît-elle plus brillante que Bételgeuse, dont la magnitude apparente est 0.12?

$$\begin{aligned} 0.12 - (-1.5) &= \log\left(\frac{b_1}{b_2}\right) \\ 1.62 &= \log\left(\frac{b_1}{b_2}\right) \\ 10^{1.62} &= \frac{b_1}{b_2} \\ \frac{b_1}{b_2} &\cong 41.69 \end{aligned}$$

Sirius est environ 41.69 fois plus brillante que Bételgeuse.

b) Le Soleil paraît environ 1.3×10^{10} fois plus brillant dans notre ciel que Sirius. Quelle est la magnitude apparente du Soleil?

$$\begin{aligned} -1.5 - m_{\text{soleil}} &= \log(1.3 \times 10^{10}) \\ m_{\text{soleil}} &= -1.5 - \log(1.3 \times 10^{10}) \\ m_{\text{soleil}} &\cong -11.61 \end{aligned}$$