

3.5 Résolution des équations logarithmiques – Feuille de travail avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

1) Trouve les racines de chaque équation

a) $2 = \log(x + 25)$

$$\begin{aligned} 10^2 &= x + 25 \\ 100 &= x + 25 \\ x &= 75 \end{aligned}$$

b) $1 - \log(w - 7) = 0$

$$\begin{aligned} 1 &= \log(w - 7) \\ 10^1 &= w - 7 \\ 10 &= w - 7 \\ w &= 17 \end{aligned}$$

c) $6 - 3\log(2n) = 0$

$$\begin{aligned} 6 &= 3\log(2n) \\ 2 &= \log(2n) \\ 10^2 &= 2n \\ 100 &= 2n \\ n &= 50 \end{aligned}$$

2) Résous

a) $5 = \log_2(2x - 10)$

$$\begin{aligned} 2^5 &= 2x - 10 \\ 32 &= 2x - 10 \\ 42 &= 2x \\ x &= 21 \end{aligned}$$

b) $9 = \log_5(x + 100) + 6$

$$\begin{aligned} 3 &= \log_5(x + 100) \\ 5^3 &= x + 100 \\ 125 &= x + 100 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

c) $\log_3(n^2 - 3n + 5) = 2$

$$\begin{aligned} 3^2 &= n^2 - 3n + 5 \\ 9 &= n^2 - 3n + 5 \\ 0 &= n^2 - 3n - 4 \\ 0 &= (n - 4)(n + 1) \\ n &= 4 \text{ ou } n = -1 \end{aligned}$$

Les deux valeurs sont valides : dans chaque cas $n^2 - 3n + 5 = 9 > 0$, donc les deux solutions sont valables.

3) Résous. Assure-toi de rejeter toute racine étrangère.

a) $\log x + \log(x - 4) = 1$

$$\begin{aligned} \log[x(x - 4)] &= 1 \\ 10^1 &= x(x - 4) \\ 10 &= x^2 - 4x \\ 0 &= x^2 - 4x - 10 \\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)} \\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{56}}{2} \\ x &= \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{2} \\ x &= 2 \pm \sqrt{14} \end{aligned}$$

Rejette $x = 2 - \sqrt{14}$ (négatif, donc $x - 4$ est indéfini).

La seule solution est $x = 2 + \sqrt{14}$

b) $\log x^3 - \log 2 = \log(2x^2)$

$$\begin{aligned} \log x^3 &= \log 2 + \log(2x^2) \\ \log x^3 &= \log(4x^2) \\ x^3 &= 4x^2 \\ x^3 - 4x^2 &= 0 \\ x^2(x - 4) &= 0 \\ x &= 0 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

Rejette $x = 0$ car $\log x^3$ est indéfini pour cette valeur.

La seule solution est $x = 4$

c) $\log(v-1) = 2 + \log(v-16)$

$$\begin{aligned}\log(v-1) - \log(v-16) &= 2 \\ \log\left(\frac{v-1}{v-16}\right) &= 2 \\ \frac{v-1}{v-16} &= 10^2 \\ v-1 &= 100(v-16) \\ v-1 &= 100v-1600 \\ 1599 &= 99v \\ v &= \frac{533}{33}\end{aligned}$$

d) $\log(k+2) + \log(k-1) = 1$

$$\begin{aligned}\log[(k+2)(k-1)] &= 1 \\ 10^1 &= (k+2)(k-1) \\ 10 &= k^2 + k - 2 \\ 0 &= k^2 + k - 12 \\ 0 &= (k+4)(k-3)\end{aligned}$$

Rejette $k = -4$ (rend $k+2$ négatif, donc le logarithme est indéfini).

La seule solution est $k = 3$

4) Résous. Vérifie s'il y a des racines étrangères.

a) $\log\sqrt{x^2-3x} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\log(x^2-3x)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \log(x^2-3x) &= \frac{1}{2} \\ \log(x^2-3x) &= 1 \\ 10^1 &= x^2-3x \\ 0 &= x^2-3x-10 \\ 0 &= (x-5)(x+2) \\ x &= 5 \text{ ou } x = -2\end{aligned}$$

Les deux valeurs sont valides : dans chaque cas $x^2-3x = 10 > 0$, donc les deux solutions sont valables.

b) $\log\sqrt{x^2+48x} = 1$

$$\begin{aligned}\log(x^2+48x)^{\frac{1}{2}} &= 1 \\ \frac{1}{2} \log(x^2+48x) &= 1 \\ \log(x^2+48x) &= 2 \\ 10^2 &= x^2+48x \\ 0 &= x^2+48x-100 \\ 0 &= (x+50)(x-2) \\ x &= -50 \text{ ou } x = 2\end{aligned}$$

Les deux valeurs sont valides : dans chaque cas $x^2+48x = 100 > 0$, donc les deux solutions sont valables.

5) Résous. Vérifie s'il y a des racines étrangères.

a) $\log_2(x+5) - \log_2(2x) = 8$

$$\begin{aligned}\log_2\left(\frac{x+5}{2x}\right) &= 8 \\ 2^8 &= \frac{x+5}{2x} \\ 256 &= \frac{x+5}{2x} \\ 512x &= x+5 \\ 511x &= 5 \\ x &= \frac{5}{511}\end{aligned}$$

Cette solution est valide : $x = \frac{5}{511} > 0$, donc $x+5$ et $2x$ sont tous deux positifs.

b) $\log(2k+4) = 1 + \log k$

$$\begin{aligned}\log(2k+4) - \log k &= 1 \\ \log\left(\frac{2k+4}{k}\right) &= 1 \\ \frac{2k+4}{k} &= 10 \\ 2k+4 &= 10k \\ 4 &= 8k \\ k &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Cette solution est valide : $k = \frac{1}{2} > 0$, donc $2k+4$ et k sont tous deux positifs.