

3.8 Le logarithme naturel – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Qu'est-ce que « e »?

Exemple 1 : Suppose que tu investis 1 \$ à un taux d'intérêt de 100 % pendant 1 an, à différents niveaux de capitalisation. Quel est le montant le plus élevé que tu peux avoir après 1 an?

Remarque : la formule utilisée pour l'intérêt composé de 1 \$ à 100 % d'intérêt, capitalisé n fois durant l'année, est :

$$A = 1\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Niveau de capitalisation, n	Montant, A en dollars
Annuellement (une fois par an)	$A = 1\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$
Semestriellement (2 fois)	$A = 1\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$
Trimestriellement (4 fois)	$A = 1\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2.4414$
Mensuellement (12 fois)	$A = 1\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.61304$
Quotidiennement (365 fois)	$A = 1\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.71457$
À la seconde (31 536 000 fois)	$A = 1\left(1 + \frac{1}{31\,536\,000}\right)^{31\,536\,000} = 2.718281785$
En continu (1 000 000 000 fois)	$A = 1\left(1 + \frac{1}{1\,000\,000\,000}\right)^{1\,000\,000\,000} = 2.718281827$

Propriétés de e :

- $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2.718\,281\,828\,459$
- e est un nombre **irrationnel**, semblable à π . Ce sont des nombres non finis et non périodiques.
- $\log_e x$ est appelé le **logarithme naturel** et peut s'écrire **$\ln x$**
- De nombreux phénomènes naturels peuvent être modélisés à l'aide de fonctions exponentielles et logarithmiques de base e .
- $\log_e e = \ln e = 1$

Partie 2 : Rappel des règles des logarithmes

Règle	Formule
Loi de la puissance des logarithmes	$\log_b x^n = n \log_b x$ pour $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$
Loi du produit des logarithmes	$\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$ pour $b > 0$, $b \neq 1$, $m > 0$, $n > 0$
Loi du quotient des logarithmes	$\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$ pour $b > 0$, $b \neq 1$, $m > 0$, $n > 0$
Formule de changement de base	$\log_b m = \frac{\log m}{\log b}$, $m > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$
Exponentielle vers logarithmique	$y = b^x \rightarrow x = \log_b y$
Logarithmique vers exponentielle	$y = \log_b x \rightarrow x = b^y$

Autres astuces utiles

$$\begin{aligned}\log_a(a^b) &= b \\ \log a &= \log_{10} a \\ \log_b b &= 1\end{aligned}$$

Partie 3 : Résolution de problèmes impliquant e

Exemple 2 : Évalue chacune des expressions suivantes

a) e^3

$$\cong 20.086$$

b) $\ln 10$

$$\cong 2.303$$

c) $\ln e$

$$= 1$$

Exemple 3 : Résous chacune des équations suivantes

a) $20 = 3e^x$

$$\begin{aligned}\frac{20}{3} &= e^x \\ \ln\left(\frac{20}{3}\right) &= \ln(e^x) \\ \ln\left(\frac{20}{3}\right) &= x \cdot \ln(e) \\ \ln\left(\frac{20}{3}\right) &= x(1) \\ x &\cong 1.897\end{aligned}$$

b) $e^{1-2x} = 55$

$$\begin{aligned}\ln(e)^{1-2x} &= \ln(55) \\ (1-2x)(\ln(e)) &= \ln(55) \\ (1-2x)(1) &= \ln(55) \\ 1-2x &= \ln(55) \\ 1-\ln(55) &= 2x \\ x &\cong -1.504\end{aligned}$$

c) $2\ln(x-3) - 7 = 3$

$$\begin{aligned}2\ln(x-3) &= 10 \\ \ln(x-3) &= 5 \\ e^5 &= x-3 \\ x &= e^5 + 3 \\ x &\cong 151.413\end{aligned}$$

d) $\ln(4e^x) = 2$

$$\begin{aligned}e^2 &= 4e^x \\ \frac{e^2}{4} &= e^x \\ \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) &= \ln(e^x) \\ \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) &= x \cdot \ln(e) \\ x &\cong 0.614\end{aligned}$$

Partie 4 : Représentation graphique de fonctions impliquant e

Exemple 4 : Trace le graphique des fonctions $y = e^x$ et $y = \ln x$

Remarque : $y = \ln x$ est la réciproque de $y = e^x$

Table 1. $y = e^x$

x	y
-1	0.37
0	1

1	2.72
AH	$y = 0$

Table 2. $y = \ln x$

x	y
0.37	-1
1	0
2.72	1
AV	$x = 0$

