

3.5 Résolution des équations logarithmiques – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Essaie de résoudre une équation logarithmique

Résous l'équation $\log(x + 5) = 2\log(x - 1)$

Indice : applique la loi de la puissance des logarithmes au côté droit de l'équation

$$\begin{aligned}\log(x + 5) &= \log(x - 1)^2 \\ x + 5 &= (x - 1)^2 \\ x + 5 &= x^2 - 2x + 1 \\ 0 &= x^2 - 3x - 4 \\ 0 &= (x - 4)(x + 1) \\ x &= 4 \text{ ou } x = -1\end{aligned}$$

Rejette $x = -1$ car $\log(x - 1)$ est indéfini pour cette valeur de x .

Donc, la seule solution est $x = 4$

Remarque : Si $\log_m a = \log_m b$, alors $a = b$.

Partie 2 : Résous des équations logarithmiques simples

Rappel : pour compléter cette leçon, tu devras te souvenir comment passer de la forme logarithmique à la forme exponentielle : $y = \log_b x \rightarrow x = b^y$

Exemple 2 : Résous chacune des équations suivantes

a) $\log(x + 4) = 1$

Méthode 1 : réécris sous forme exponentielle

$$\begin{aligned}x + 4 &= 10^1 \\ x + 4 &= 10 \\ x &= 6\end{aligned}$$

Méthode 2 : exprime les deux côtés comme un logarithme de même base

$$\begin{aligned}\log(x + 4) &= \log(10) \\ x + 4 &= 10 \\ x &= 6\end{aligned}$$

b) $\log_5(2x - 3) = 2$

$$\begin{aligned}5^2 &= 2x - 3 \\ 25 &= 2x - 3 \\ 28 &= 2x \\ 14 &= x\end{aligned}$$

Partie 3 : Applique des stratégies de factorisation pour résoudre des équations

Exemple 3 : Résous chaque équation et rejette toute racine étrangère

a) $\log(x - 1) - 1 = -\log(x + 2)$

$$\begin{aligned}\log(x - 1) + \log(x + 2) &= 1 \\ \log[(x - 1)(x + 2)] &= 1 \\ \log(x^2 + x - 2) &= 1 \\ x^2 + x - 2 &= 10^1 \\ x^2 + x - 12 &= 0 \\ (x + 4)(x - 3) &= 0 \\ x &= -4 \text{ ou } x = 3\end{aligned}$$

Rejette $x = -4$ car les deux expressions originales sont indéfinies pour cette valeur.

La seule solution est $x = 3$

b) $\log \sqrt[3]{x^2 + 48x} = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\log(x^2 + 48x)^{\frac{1}{3}} &= \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \log(x^2 + 48x) &= \frac{2}{3} \\ 3 \left[\frac{1}{3} \log(x^2 + 48x) \right] &= 3 \left(\frac{2}{3} \right) \\ \log(x^2 + 48x) &= 2 \\ x^2 + 48x &= 10^2 \\ x^2 + 48x - 100 &= 0 \\ (x + 50)(x - 2) &= 0 \\ x &= -50 \text{ ou } x = 2\end{aligned}$$

Les deux valeurs sont valides, car elles rendent toutes les deux l'argument du logarithme positif.

c) $\log_3 x - \log_3(x - 4) = 2$

$$\begin{aligned}\log_3 \left(\frac{x}{x-4} \right) &= 2 \\ \frac{x}{x-4} &= 3^2 \\ \frac{x}{x-4} &= 9 \\ x &= 9(x-4) \\ x &= 9x - 36 \\ 36 &= 8x \\ \frac{9}{2} &= x\end{aligned}$$

Exemple 4 : Si $\log_a b = 3$, utilise les règles des logarithmes pour trouver la valeur de...

a) $\log_a ab^2$

$$\begin{aligned}\log_a ab^2 &= \log_a a + \log_a b^2 \\ &= \log_a a + 2\log_a b \\ &= 1 + 2(3) \\ &= 7\end{aligned}$$

b) $\log_b a$

Indice : il faut changer la base : $\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$

$$\begin{aligned}\log_b a &= \frac{\log_a a}{\log_a b} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$