

3.4 Résolution des équations exponentielles – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Changer la base des puissances

Les fonctions exponentielles peuvent s'écrire de plusieurs façons différentes. Il est souvent utile d'exprimer une expression exponentielle à l'aide d'une base différente de celle donnée.

Exemple 1 : Exprime chacune des expressions suivantes comme une puissance de base 2.

a) 8

$$= 2^3$$

b) 4^3

$$\begin{aligned} 4^3 &= (2^2)^3 \\ &= 2^6 \end{aligned}$$

c) $\sqrt{16} \times (\sqrt[5]{32})^3$

$$\begin{aligned} \sqrt{16} \times (\sqrt[5]{32})^3 &= 16^{\frac{1}{2}} \times 32^{\frac{3}{5}} \\ &= (2^4)^{\frac{1}{2}} \times (2^5)^{\frac{3}{5}} \\ &= 2^2 \times 2^3 \\ &= 2^5 \end{aligned}$$

d) 12

$$\begin{aligned} 2^x &= 12 \\ x &= \log_2 12 \end{aligned}$$

$$\therefore 12 = 2^{\log_2 12}$$

Règle : $b^{\log_b x} = x$

La partie d) montre que tout nombre positif peut être exprimé comme une puissance de tout autre nombre positif.

Exemple 2 : Résous chaque équation en trouvant une base commune

Rappel : si $x^a = x^b$, alors $a = b$

a) $4^{x+5} = 64^x$

$$\begin{aligned} 4^{x+5} &= (4^3)^x \\ 4^{x+5} &= 4^{3x} \\ x + 5 &= 3x \\ 5 &= 2x \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

b) $4^{2x} = 8^{x-3}$

$$\begin{aligned} (2^2)^{2x} &= (2^3)^{x-3} \\ 2^{4x} &= 2^{3x-9} \\ 4x &= 3x - 9 \\ x &= -9 \end{aligned}$$

Partie 2 : Résoudre des équations exponentielles

Lorsque ton équation contient des puissances de bases différentes et qu'il est difficile de les écrire avec la même base, il peut être plus facile de résoudre en prenant le **logarithme** des deux côtés et en appliquant la **loi de la puissance** des logarithmes pour retirer la variable de l'**exposant**.

Exemple 3 : Résous chaque équation

a) $4^{2x-1} = 3^{x+2}$

$$\log 4^{2x-1} = \log 3^{x+2}$$

Remarque : Prends le logarithme des deux côtés.

$$(2x - 1)\log 4 = (x + 2)\log 3$$

Remarque : Utilise la loi de la puissance des logarithmes.

$$2x\log 4 - \log 4 = x\log 3 + 2\log 3$$

Remarque : Utilise la propriété de distributivité pour développer.

$$2x\log 4 - x\log 3 = 2\log 3 + \log 4$$

Remarque : Déplace les termes contenant la variable d'un même côté.

$$x(2\log 4 - \log 3) = 2\log 3 + \log 4$$

Remarque : Mets en évidence.

$$x\log\left(\frac{16}{3}\right) = \log(36)$$

Remarque : Utilise les règles des logarithmes pour isoler la variable et écris le résultat comme un seul logarithme.

$$x = \frac{\log(36)}{\log\left(\frac{16}{3}\right)}$$

$$x = \log_{\frac{16}{3}}(36) \cong 2.14$$

$$\text{b) } 2^{x+1} = 3^{x-1}$$

$$\log 2^{x+1} = \log 3^{x-1}$$

$$(x + 1)\log 2 = (x - 1)\log 3$$

$$x\log 2 + \log 2 = x\log 3 - \log 3$$

$$\log 2 + \log 3 = x\log 3 - x\log 2$$

$$\log 2 + \log 3 = x(\log 3 - \log 2)$$

$$\log(6) = x\log\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x = \frac{\log(6)}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$x = \log_{\frac{3}{2}}(6) \cong 4.419$$

Partie 3 : Appliquer la formule quadratique

Parfois, il n'y a pas de méthode évidente pour résoudre une équation exponentielle. Si tu remarques deux puissances de même base avec un exposant de x , il pourrait y avoir une quadratique cachée.

Exemple 4 : Résous l'équation suivante

$$2^x - 2^{-x} = 4$$

$$2^x(2^x - 2^{-x}) = 2^x(4)$$

Remarque : Multiplie les deux côtés par 2^x .

$$2^{2x} - 2^0 = 4(2^x)$$

Remarque : Distribue.

$$2^{2x} - 4(2^x) - 1 = 0$$

Remarque : Réarrange sous la forme standard $ax^2 + bx + c = 0$.

$$(2^x)^2 - 4(2^x) - 1 = 0$$

Soit $k = 2^x$ pour faire apparaître la quadratique

$$k^2 - 4k - 1 = 0$$

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Remarque : Résous à l'aide de la formule quadratique.

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

Remarque : N'oublie pas de simplifier l'expression radicale.

$$k = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$k = \frac{2(2 \pm \sqrt{5})}{2}$$

$$k = 2 \pm \sqrt{5}$$

Maintenant, remplace k par 2^x et résous

Cas 1

$$2^x = 2 + \sqrt{5}$$

$$x = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

$$x \cong 2.08$$

Cas 2

$$2^x = 2 - \sqrt{5}$$

Aucune solution réelle. L'argument d'un logarithme doit être supérieur à zéro.

Partie 4 : Question d'application

Rappel :

Équation : $y = a(b)^x$

- a = montant initial
- b = facteur de croissance ($b > 1$) ou de décroissance ($0 < b < 1$)
- y = montant futur
- x = nombre de fois que a a augmenté ou diminué

Pour calculer x , utilise l'équation :

$$x = \frac{\text{temps total}}{\text{temps requis pour une période de croissance ou de décroissance}}$$

Exemple 5 : Une culture de bactéries double toutes les 15 minutes. Combien de temps faudra-t-il pour qu'une culture de 20 bactéries atteigne une population de 163 840?

$$163\,840 = 20(2)^{\frac{t}{15}}$$

$$8192 = 2^{\frac{t}{15}}$$

$$\frac{t}{15} = \log_2 8192$$

$$\frac{t}{15} = 13$$

$$t = 195 \text{ minutes}$$

Exemple 6 : Une minute après avoir placé un échantillon de 100 mg de polonium-218 dans une chambre nucléaire, il n'en reste que 80 mg. Quelle est la demi-vie du polonium-218?

$$80 = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$0.8 = 0.5^{\frac{1}{h}}$$

$$\frac{1}{h} = \log_{0.5}(0.8)$$

$$h = \frac{1}{\log_{0.5}(0.8)}$$

$$h \cong 3.1 \text{ minutes}$$