

3.3 Lois du produit et du quotient des logarithmes – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Preuve de la loi du produit des logarithmes

Soit $x = \log_b m$ et $y = \log_b n$

Écrit sous forme exponentielle :

$$b^x = m \text{ et } b^y = n$$

$$\begin{aligned} mn &= b^x b^y \\ mn &= b^{x+y} \\ \log_b(mn) &= x + y \\ \log_b(mn) &= \log_b m + \log_b n \end{aligned}$$

Partie 2 : Résumé des règles des logarithmes

Règle	Formule
Loi de la puissance des logarithmes	$\log_b x^n = n \log_b x$ pour $b > 0, b \neq 1, x > 0$
Loi du produit des logarithmes	$\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$ pour $b > 0, b \neq 1, m > 0, n > 0$
Loi du quotient des logarithmes	$\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$ pour $b > 0, b \neq 1, m > 0, n > 0$
Formule de changement de base	$\log_b m = \frac{\log m}{\log b}, m > 0, b > 0, b \neq 1$
Exponentielle vers logarithmique	$y = b^x \rightarrow x = \log_b y$
Logarithmique vers exponentielle	$y = \log_b x \rightarrow x = b^y$
Autres astuces utiles	$\log_a(a^b) = b$ $\log a = \log_{10} a$ $\log_b b = 1$

Partie 3 : Pratique des règles des logarithmes

Exemple 1 : Écris comme un seul logarithme

a) $\log_5 6 + \log_5 8 - \log_5 16$

$$\begin{aligned} \log_5 6 + \log_5 8 - \log_5 16 &= \log_5 \left(\frac{6 \times 8}{16} \right) \\ &= \log_5 3 \end{aligned}$$

b) $\log x + \log y + \log(3x) - \log y$

$$= \log x + \log(3x)$$

Remarque : On commence par regrouper les termes semblables. Il faut avoir la même base et le même argument.

$$= \log [(x)(3x)]$$

$$= \log(3x^2)$$

Remarque : On ne peut pas utiliser la loi de la puissance, car l'exposant 2 s'applique seulement à x , et non à $3x$.

c) $\frac{\log_2 7}{\log_2 5}$

$$= \log_5 7$$

Remarque : On a utilisé la formule de changement de base.

d) $\log 12 - 3\log 2 + 2\log 3$

$$\begin{aligned}\log 12 - 3\log 2 + 2\log 3 &= \log 12 - \log 2^3 + \log 3^2 \\ &= \log 12 - \log 8 + \log 9 \\ &= \log \left(\frac{12 \times 9}{8} \right) \\ &= \log \left(\frac{27}{2} \right)\end{aligned}$$

Exemple 2 : Écris comme un seul logarithme, puis évalue

a) $\log_8 4 + \log_8 16$

$$\begin{aligned}\log_8 4 + \log_8 16 &= \log_8 (4 \times 16) \\ &= \log_8 64 \\ &= \frac{\log 64}{\log 8} \\ &= 2\end{aligned}$$

b) $\log_3 405 - \log_3 5$

$$\begin{aligned}\log_3 405 - \log_3 5 &= \log_3 \left(\frac{405}{5} \right) \\ &= \log_3 81 \\ &= \frac{\log 81}{\log 3} \\ &= 4\end{aligned}$$

c) $2\log 5 + \frac{1}{2} \log 16$

$$\begin{aligned}2\log 5 + \frac{1}{2} \log 16 &= \log 5^2 + \log \sqrt{16} \\ &= \log 25 + \log 4 \\ &= \log (25 \times 4) \\ &= \log 100 \\ &= 2\end{aligned}$$

Exemple 3 : Écris le logarithme comme une somme ou une différence de logarithmes

a) $\log_3(xy)$

$$= \log_3 x + \log_3 y$$

b) $\log 20$

$$= \log 4 + \log 5$$

c) $\log(ab^2c)$

$$\begin{aligned}\log(ab^2c) &= \log a + \log b^2 + \log c \\ &= \log a + 2\log b + \log c\end{aligned}$$

Exemple 4 : Simplifie les expressions algébriques suivantes

a) $\log \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2} \right)$

$$\begin{aligned}\log \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) &= \log \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} \right) \\ &= \log x^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{3}{2} \log x\end{aligned}$$

b) $\log(\sqrt{x})^3 + \log x^2 - \log \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\log(\sqrt{x})^3 + \log x^2 - \log \sqrt{x} &= \log x^{\frac{3}{2}} + \log x^2 - \log x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{2} \log x + 2 \log x - \frac{1}{2} \log x \\ &= \frac{3}{2} \log x + \frac{4}{2} \log x - \frac{1}{2} \log x \\ &= 3 \log x\end{aligned}$$

c) $\log(2x - 2) - \log(x^2 - 1)$

$$\begin{aligned}\log(2x - 2) - \log(x^2 - 1) &= \log \left(\frac{2x - 2}{x^2 - 1} \right) \\ &= \log \left[\frac{2(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} \right] \\ &= \log \left(\frac{2}{x + 1} \right)\end{aligned}$$