

3.2 Loi de la puissance des logarithmes – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Résoudre pour un exposant inconnu

Exemple 1 : Suppose que tu investis 100 \$ dans un compte qui rapporte 5 % d'intérêt, composé annuellement. Le montant, A , en dollars, dans le compte après un temps donné, t , en années, est donné par $A = 100(1.05)^t$. Combien de temps faudra-t-il pour que le montant dans ce compte double?

$$\begin{aligned} 200 &= 100(1.05)^t \\ 2 &= (1.05)^t \\ \log 2 &= \log 1.05^t \\ \log 2 &= t \log 1.05 \\ t &= \frac{\log 2}{\log 1.05} \\ t &\cong 14.2 \text{ ans} \end{aligned}$$

Dans cet exemple, nous avons utilisé la loi de la puissance des logarithmes pour nous aider à résoudre un exposant inconnu.

Loi de la puissance des logarithmes : $\log_b x^n = n \log_b x$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$

Preuve de la loi de la puissance des logarithmes :

Soit $w = \log_b x$

$w = \log_b x$	
$x = b^w$	Écris sous forme exponentielle
$x^n = (b^w)^n$	Élève les deux côtés à l'exposant n
$x^n = b^{wn}$	Applique la loi de la puissance des exposants
$\log_b x^n = wn$	Écris comme une expression logarithmique
$\log_b x^n = n \log_b x$	Substitue $w = \log_b x$

Partie 2 : Pratique de la loi de la puissance des logarithmes

Exemple 2 : Évalue chacune des expressions suivantes

a) $\log_3 9^4$

Méthode 1 : Simplifie et évalue à l'aide des règles de la dernière leçon

Règle : $\log_a(a^b) = b$

$$\begin{aligned} \log_3 9^4 &= \log_3 (3^2)^4 \\ &= \log_3 3^8 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Méthode 2 : Utilise la loi de la puissance des logarithmes

Règle : $\log_b x^n = n \log_b x$

$$\begin{aligned} \log_3 9^4 &= 4 \log_3 9 \\ &= 4 \log_3 3^2 \\ &= 4(2) \\ &= 8 \end{aligned}$$

b) $\log_2 8^5$

$$\begin{aligned} \log_2 8^5 &= 5 \log_2 (2^3) \\ &= 5(3) \\ &= 15 \end{aligned}$$

c) $\log_5 \sqrt{125}$

$$\begin{aligned}\log_5 \sqrt{125} &= \frac{1}{2} \log_5(5^3) \\ &= \frac{1}{2}(3) \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Partie 3 : Formule de changement de base

En repensant à l'exemple 1, nous avons l'équation :

$$2 = 1.05^t$$

Nous aurions pu écrire ceci sous forme logarithmique comme $\log_{1.05} 2 = t$, mais malheureusement, il n'y a pas de façon simple de transformer 2 en une puissance de base 1,05, et on ne peut pas simplement le taper sur une calculatrice pour l'évaluer, car la plupart des calculatrices scientifiques ne peuvent évaluer que des logarithmes en base 10. Nous avons donc utilisé la loi de la puissance des logarithmes à la place.

Chaque fois que tu veux évaluer un logarithme qui n'est pas en base 10, comme $\log_{1.05} 2$, tu peux utiliser la **formule de changement de base** :

Pour calculer un logarithme de n'importe quelle base, exprime-le en termes de logarithmes communs à l'aide de la formule de changement de base :

$$\log_b m = \frac{\log m}{\log b}, \quad m > 0, b > 0, b \neq 1$$

À l'aide de cette formule, nous pourrions déterminer que $\log_{1.05} 2 = \frac{\log 2}{\log 1.05}$, ce qui est exactement ce que nous avons obtenu en utilisant la loi de la puissance des logarithmes.

Partie 4 : Évaluer des logarithmes de bases variées

Exemple 3 : Évalue, arrondi à trois décimales

a) $\log_5 17$

$$\begin{aligned}\log_5 17 &= \frac{\log 17}{\log 5} \\ &\cong 1.760\end{aligned}$$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 10$

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}} 10 &= \frac{\log 10}{\log \left(\frac{1}{2}\right)} \\ &\cong -3.322\end{aligned}$$

Exemple 4 : Résous pour y dans l'équation $100 = 2^y$

$$\begin{aligned}y &= \log_2 100 \\ y &= \frac{\log 100}{\log 2} \\ y &\cong 6.644\end{aligned}$$

OU

$$\begin{aligned}\log 100 &= \log 2^y \\ \log 100 &= y \log 2 \\ y &= \frac{\log 100}{\log 2} \\ y &\cong 6.644\end{aligned}$$