

3.1 Introduction aux logarithmes et révision des exposants – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Dans cette section, tu apprendras comment une fonction logarithmique est la réciproque d'une fonction exponentielle. Tu apprendras aussi comment exprimer des équations exponentielles sous forme logarithmique.

Partie 1 : Révision des fonctions exponentielles

Équation : $y = a(b)^x$

- a = quantité initiale
- b = facteur de croissance ($b > 1$) ou de décroissance ($0 < b < 1$)
- y = quantité future
- x = nombre de fois que a a augmenté ou diminué

Pour calculer x , utilise l'équation :

$$x = \frac{\text{temps total}}{\text{temps que prend une période de croissance ou de décroissance}}$$

Exemple 1 : Une colonie d'insectes compte actuellement une population de 50 insectes. Sa population double tous les 3 jours.

a) Quelle est la population après 12 jours?

$$\begin{aligned} y &= 50(2)^{\frac{12}{3}} \\ y &= 50(2)^4 \\ y &= 800 \end{aligned}$$

b) Combien de temps faudra-t-il pour que la population atteigne 25 600?

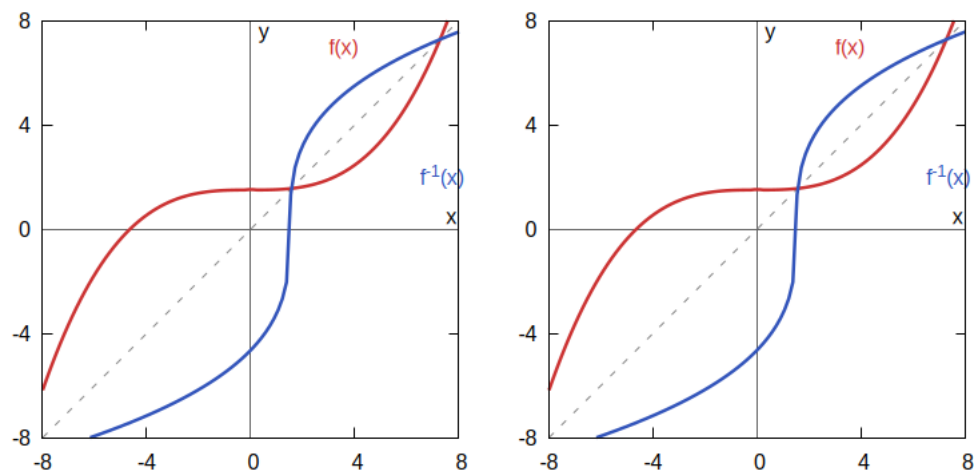
$$\begin{aligned} 25\,600 &= 50(2)^{\frac{t}{3}} \\ 512 &= 2^{\frac{t}{3}} \\ \log 512 &= \log 2^{\frac{t}{3}} \\ \log 512 &= \left(\frac{t}{3}\right) \log 2 \\ \frac{\log 512}{\log 2} &= \frac{t}{3} \\ 9 &= \frac{t}{3} \\ t &= 27 \text{ jours} \end{aligned}$$

Partie 2 : Révision des fonctions réciproques

Réciproque d'une fonction :

- La réciproque d'une fonction f se note f^{-1}
- La fonction et sa réciproque ont la propriété suivante : si $f(a) = b$, alors $f^{-1}(b) = a$
- Donc, si $f(5) = 13$, alors $f^{-1}(13) = 5$
- Autrement dit : la réciproque d'une fonction a exactement les mêmes points que la fonction originale, sauf que les x et les y ont été inversés.

Le graphique de $f^{-1}(x)$ est le graphique de $f(x)$ refléchi par rapport à la droite $y = x$. Cela est vrai pour toutes les fonctions et leurs réciproques.



Exemple 2 : Détermine l'équation de la réciproque de la fonction $f(x) = 3(x - 5)^2 + 1$

Méthode pour déterminer la réciproque algébriquement :

1. Remplace $f(x)$ par y
2. Échange les variables x et y
3. Isole y
4. Remplace y par $f^{-1}(x)$

$$\begin{aligned}
 y &= 3(x - 5)^2 + 1 \\
 x &= 3(y - 5)^2 + 1 \\
 \frac{x - 1}{3} &= (y - 5)^2 \\
 \pm \sqrt{\frac{x - 1}{3}} &= y - 5 \\
 5 \pm \sqrt{\frac{x - 1}{3}} &= y
 \end{aligned}$$

Équation de la réciproque : $f^{-1}(x) = 5 \pm \sqrt{\frac{x - 1}{3}}$

Partie 3 : Révision des lois des exposants

Nom	Règle
Loi du produit	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
Loi du quotient	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
Loi de la puissance d'une puissance	$(x^a)^b = x^{a \times b}$
Loi de l'exposant négatif	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
Exposant zéro	$x^0 = 1$

Partie 4 : Réciproque d'une fonction exponentielle

Exemple 3 :

a) Détermine l'équation de la réciproque de $f(x) = 2^x$.

$$\begin{aligned} y &= 2^x \\ x &= 2^y \\ \log x &= \log 2^y \\ \log x &= y \log 2 \\ y &= \frac{\log x}{\log 2} \\ y &= \log_2 x \end{aligned}$$

$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$

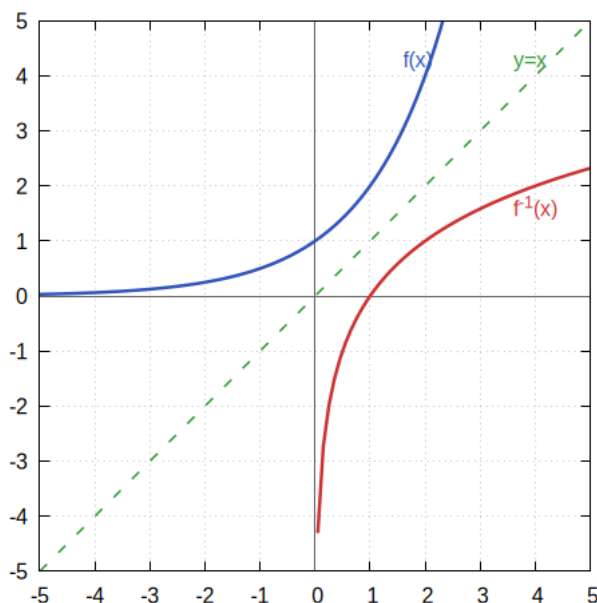
Remarque : cette étape utilise la formule de « changement de base » que nous verrons plus tard dans l'unité :

$$\log_b m = \frac{\log m}{\log b}$$

b) Trace le graphique de $f(x)$ et de $f^{-1}(x)$.

Remarque : il suffit d'échanger les coordonnées x et y pour obtenir les points clés de la réciproque d'une fonction. Le graphique devrait sembler être une réflexion par rapport à la droite $y = x$.

$f(x) = 2^x$		$f^{-1}(x) = \log_2 x$	
x	y	x	y
-2	0.25	0.25	-2
-1	0.5	0.5	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2



c) Complète le tableau des propriétés clés pour les deux fonctions

$y = 2^x$	$y = \log_2 x$
Abscisse à l'origine : aucune	Abscisse à l'origine : (1, 0)
Ordonnée à l'origine : (0, 1)	Ordonnée à l'origine : aucune
Domaine : $\{x \in \mathbb{R}\}$	Domaine : $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
Image : $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$	Image : $\{y \in \mathbb{R}\}$
Asymptote : asymptote horizontale en $y = 0$	Asymptote : asymptote verticale en $x = 0$

Partie 5 : Qu'est-ce qu'une fonction logarithmique?

La fonction logarithmique est la **réci-proque** de la fonction exponentielle de même base.

La **fonction logarithmique** est définie par $y = \log_b x$, ou y est égal au logarithme de x en base b .

La fonction est définie seulement pour $b > 0$, $b \neq 1$

Dans cette notation, y est l'exposant auquel la base, b , doit être élevée pour donner la valeur de x .

Autrement dit, la solution d'un logarithme est toujours un **exposant**.

La fonction logarithmique est surtout utile pour résoudre des **exposants** inconnus.

Les **logarithmes communs** sont des logarithmes en base 10. Il n'est pas nécessaire d'écrire la base pour les logarithmes communs : $\log x$ signifie la même chose que $\log_{10} x$

Partie 6 : Écrire des expressions exponentielles et logarithmiques équivalentes

Les équations exponentielles peuvent s'écrire sous forme logarithmique, et vice versa :

- $y = b^x \rightarrow x = \log_b y$
- $y = \log_b x \rightarrow x = b^y$

Exemple 4 : Réécris chaque équation sous forme logarithmique

a) $16 = 2^4$

$\log_2 16 = 4$

b) $m = n^3$

$\log_n m = 3$

c) $3^{-2} = \frac{1}{9}$

$\log_3 \left(\frac{1}{9} \right) = -2$

Exemple 5 : Réécris chaque équation logarithmique sous forme exponentielle

a) $\log_4 64 = 3$

$4^3 = 64$

b) $y = \log x$

$10^y = x$

Remarque : puisqu'aucune base n'est écrite, il est sous-entendu qu'il s'agit du logarithme commun de x .

Partie 7 : Évaluer un logarithme

Exemple 6 : Évalue chaque logarithme sans calculatrice

Remarque : l'une ou l'autre des deux règles ci-dessous convient pour évaluer des expressions logarithmiques.

Règle : si $x^a = x^b$, alors $a = b$

a) $y = \log_3 81$

$$\begin{aligned} 3^y &= 81 \\ 3^y &= 3^4 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

b) $y = \log\left(\frac{1}{100}\right)$

$$\begin{aligned}10^y &= \frac{1}{100} \\10^y &= \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\10^y &= 10^{-2} \\y &= -2\end{aligned}$$

c) $y = \log_2\left(\frac{1}{8}\right)$

$$\begin{aligned}y &= \log_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \\y &= \log_2 2^{-3} \\y &= -3\end{aligned}$$

Règle : $\log_a(a^b) = b$

d) $y = \log_4 64$

$$\begin{aligned}y &= \log_4(4^3) \\y &= 3\end{aligned}$$