

2.1 Fiche d'exercices sur la division longue de polynômes et le théorème du reste avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

1) Utilisez le théorème du reste pour déterminer le reste lorsque $2x^3 + 7x^2 - 8x + 3$ est divisé par chaque binôme.

a) $x + 1$

$$\begin{aligned} P(-1) &= 2(-1)^3 + 7(-1)^2 - 8(-1) + 3 \\ &= 16 \end{aligned}$$

b) $x - 2$

$$\begin{aligned} P(2) &= 2(2)^3 + 7(2)^2 - 8(2) + 3 \\ &= 31 \end{aligned}$$

c) $x + 3$

$$\begin{aligned} P(-3) &= 2(-3)^3 + 7(-3)^2 - 8(-3) + 3 \\ &= 36 \end{aligned}$$

2) a) Divisez $x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ par $x + 1$. Exprimez le résultat sous forme de quotient.

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 4 \\ x + 1 \overline{) x^3 + 3x^2 - 2x + 5} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ 2x^2 - 2x \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ -4x + 5 \\ \underline{-4x - 4} \\ R = 9 \end{array}$$

Le résultat sous forme de quotient est :

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 5}{x + 1} = x^2 + 2x - 4 + \frac{9}{x + 1}$$

b) Écrivez l'énoncé correspondant qui peut être utilisé pour vérifier la division.

$$x^3 + 3x^2 - 2x + 5 = (x + 1)(x^2 + 2x - 4) + 9$$

3) Divisez $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 17x - 8$ par $3x - 4$. Exprimez le résultat sous forme de quotient.

Remarque : le dividende n'a pas de terme en x^2 au bon endroit pour cette étape, alors un terme substitut $0x^2$ est utilisé pour garder les colonnes alignées.

$$\begin{array}{r} x^3 + 0x^2 - 2x + 3 \\ 3x - 4 \overline{) 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 17x - 8} \\ \underline{3x^4 - 4x^3} \\ 0x^3 - 6x^2 \\ \underline{0x^3 + 0x^2} \\ -6x^2 + 17x \\ \underline{-6x^2 + 8x} \\ 9x - 8 \\ \underline{9x - 12} \\ R = 4 \end{array}$$

Le résultat sous forme de quotient est :

$$\frac{3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 17x - 8}{3x - 4} = x^3 - 2x + 3 + \frac{4}{3x - 4}$$

b) Écrivez l'énoncé correspondant qui peut être utilisé pour vérifier la division.

$$3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 17x - 8 = (3x - 4)(x^3 - 2x + 3) + 4$$

4) Effectuez chaque division. Exprimez le résultat sous forme de quotient.

4) Effectuez chaque division. Exprimez le résultat sous forme de quotient.

a) $x^3 + 7x^2 - 3x + 4$ divisé par $x + 2$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 5x - 13 \\
 x + 2 \overline{) x^3 + 7x^2 - 3x + 4} \\
 \underline{x^3 + 2x^2} \\
 5x^2 - 3x \\
 \underline{5x^2 + 10x} \\
 -13x + 4 \\
 \underline{-13x - 26} \\
 R = 30
 \end{array}$$

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x + 2} = x^2 + 5x - 13 + \frac{30}{x + 2}$$

b) $6x^3 + x^2 - 14x - 6$ divisé par $3x + 2$

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - x - 4 \\
 3x + 2 \overline{) 6x^3 + x^2 - 14x - 6} \\
 \underline{6x^3 + 4x^2} \\
 -3x^2 - 14x \\
 \underline{-3x^2 - 2x} \\
 -12x - 6 \\
 \underline{-12x - 8} \\
 R = 2
 \end{array}$$

$$\frac{6x^3 + x^2 - 14x - 6}{3x + 2} = 2x^2 - x - 4 + \frac{2}{3x + 2}$$

c) $10x^3 + 11 - 9x^2 - 8x$ divisé par $5x - 2$

Remarque : le dividende est d'abord réordonné en forme standard, en degré décroissant : $10x^3 - 9x^2 - 8x + 11$.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - x - 2 \\
 5x - 2 \overline{) 10x^3 - 9x^2 - 8x + 11} \\
 \underline{10x^3 - 4x^2} \\
 -5x^2 - 8x \\
 \underline{-5x^2 + 2x} \\
 -10x + 11 \\
 \underline{-10x + 4} \\
 R = 7
 \end{array}$$

$$\frac{10x^3 - 9x^2 - 8x + 11}{5x - 2} = 2x^2 - x - 2 + \frac{7}{5x - 2}$$

d) $11x - 4x^4 - 7$ divisé par $x - 3$

Remarque : le dividende est d'abord réordonné en forme standard, en degré décroissant : $-4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 11x - 7$.

$$\begin{array}{r}
 -4x^3 - 12x^2 - 36x - 97 \\
 x - 3 \overline{) -4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 11x - 7} \\
 \underline{-4x^4 + 12x^3} \\
 -12x^3 + 0x^2 \\
 \underline{-12x^3 + 36x^2} \\
 -36x^2 + 11x \\
 \underline{-36x^2 + 108x} \\
 -97x - 7 \\
 \underline{-97x + 291} \\
 R = -298
 \end{array}$$

$$\frac{-4x^4 + 11x - 7}{x - 3} = -4x^3 - 12x^2 - 36x - 97 - \frac{298}{x - 3}$$

e) $6x^3 + x^2 + 7x + 3$ divisé par $3x + 2$

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - x + 3 \\
 3x + 2 \overline{) 6x^3 + x^2 + 7x + 3} \\
 \underline{6x^3 + 4x^2} \\
 -3x^2 + 7x \\
 \underline{-3x^2 - 2x} \\
 9x + 3 \\
 \underline{9x + 6} \\
 R = -3
 \end{array}$$

$$\frac{6x^3 + x^2 + 7x + 3}{3x + 2} = 2x^2 - x + 3 - \frac{3}{3x + 2}$$

f) $8x^3 + 4x^2 - 31$ divisé par $2x - 3$

Remarque : le dividende n'a pas de terme en x , alors un terme substitut $0x$ est utilisé pour garder les colonnes alignées.

$$\begin{array}{r}
 4x^2 + 8x + 12 \\
 2x - 3 \overline{) 8x^3 + 4x^2 + 0x - 31} \\
 \underline{8x^3 - 12x^2} \\
 16x^2 + 0x \\
 \underline{16x^2 - 24x} \\
 24x - 31 \\
 \underline{24x - 36} \\
 R = 5
 \end{array}$$

$$\frac{8x^3 + 4x^2 - 31}{2x - 3} = 4x^2 + 8x + 12 + \frac{5}{2x - 3}$$

g) $6x^2 - 6 + 8x^3$ divisé par $4x - 3$

Remarque : le dividende est d'abord réordonné en forme standard, en degré décroissant : $8x^3 + 6x^2 + 0x - 6$.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 3x + \frac{9}{4} \\
 4x - 3 \overline{) 8x^3 + 6x^2 + 0x - 6} \\
 \underline{8x^3 - 6x^2} \\
 12x^2 + 0x \\
 \underline{12x^2 - 9x} \\
 9x - 6 \\
 \underline{\frac{3}{4}} \\
 \frac{3}{4}
 \end{array}$$

$$\frac{6x^2 - 6 + 8x^3}{4x - 3} = 2x^2 + 3x + \frac{9}{4} + \frac{3}{4(4x - 3)}$$

5) Le volume, en cm cubes, d'une boîte rectangulaire peut être modélisé par l'expression polynomiale $2x^3 + 17x^2 + 38x + 15$. Déterminez des dimensions possibles de la boîte si la hauteur, en cm, est donnée par $x + 5$.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 7x + 3 \\
 x + 5 \overline{) 2x^3 + 17x^2 + 38x + 15} \\
 \underline{2x^3 + 10x^2} \\
 7x^2 + 38x \\
 \underline{7x^2 + 35x} \\
 3x + 15 \\
 \underline{3x + 15} \\
 R = 0
 \end{array}$$

$$2x^3 + 17x^2 + 38x + 15 = (x + 5)(2x^2 + 7x + 3) = (x + 5)(x + 3)(2x + 1)$$

Des dimensions possibles de la boîte sont $x + 5$ (hauteur), $x + 3$ (longueur), et $2x + 1$ (largeur).

6) Déterminez la valeur de k telle que lorsque $P(x) = kx^3 + 5x^2 - 2x + 3$ est divisé par $x + 1$, le reste est 7.

Le reste est $P(-1)$. Résolvez pour k lorsque $P(-1)$ est fixé égal à 7.

$$\begin{aligned}P(-1) &= k(-1)^3 + 5(-1)^2 - 2(-1) + 3 \\7 &= -k + 5 + 2 + 3 \\7 &= -k + 10 \\-3 &= -k \\3 &= k\end{aligned}$$

Par conséquent, la valeur de k est 3.