

## 2.4 Leçon sur la résolution d'équations polynomiales avec solutions

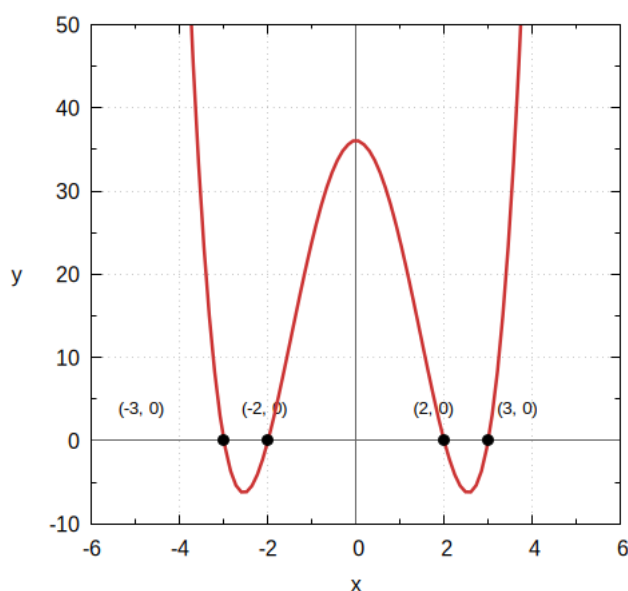
Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de [www.jensenmath.ca](http://www.jensenmath.ca)

Dans cette section, vous apprendrez des méthodes pour résoudre des équations polynomiales de degré supérieur à deux par factorisation (à l'aide du théorème du facteur). Vous identifierez également le lien entre les racines des équations polynomiales, les abscisses à l'origine du graphique d'une fonction polynomiale, et les zéros de la fonction.

### Partie 1 : Investigation

a) Utilisez la technologie pour tracer le graphique de la fonction  $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$



b) Déterminez les abscisses à l'origine à partir du graphique

Les abscisses à l'origine sont :

$(-3, 0)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$ , et  $(3, 0)$

c) Factorisez  $f(x)$ . Ensuite, utilisez les facteurs pour déterminer les zéros (racines) de  $f(x)$ .

$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ —peut être factorisé comme un trinôme carré  
 $0 = (x^2)^2 - 13(x^2) + 36$

Le terme constant se factorise en  $-9$  et  $-4$  (produit  $36$ , somme  $-13$ ) :  
 $0 = (x^2 - 9)(x^2 - 4)$

Les deux sont des différences de carrés :

$$0 = (x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2)$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = -3$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x_3 = 2$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x_4 = -2$$

**Rappel :** Les zéros de la fonction sont les valeurs de  $x$  qui font  $f(x) = 0$ . Si l'équation polynomiale est factorisable, alors les valeurs des zéros (racines) peuvent être déterminées algébriquement en résolvant chaque facteur linéaire ou quadratique.

d) Comment les abscisses à l'origine du graphique sont-elles liées aux racines (zéros) de l'équation ?

Les zéros de l'équation SONT les abscisses à l'origine du graphique de la fonction.

**Exemple 1 :** Indiquez les solutions des polynômes suivants qui sont déjà sous forme factorisée

a)  $x(2x + 3)(x - 5) = 0$

$$x_1 = 0$$

$$2x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$x - 5 = 0 \rightarrow x_3 = 5$$

**Solution(s) :**  $(0, 0)$ ,  $(-\frac{3}{2}, 0)$ , et  $(5, 0)$

b)  $(2x^2 - 3)(3x^2 + 1) = 0$

$$2x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = \frac{3}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$3x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{1}{3}} \text{—pas une solution réelle}$$

**Solution(s) :**  $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$  et  $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$

**Exemple 2 :** Résolvez chaque équation polynomiale par factorisation

a)  $x^3 - x^2 - 2x = 0$

$$x(x^2 - x - 2) = 0 \text{—facteur commun}$$

Produit  $-2$ , somme  $-1 \rightarrow -2$  et  $1$

$$x(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x_2 = 2$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x_3 = -1$$

**Solution(s) :**  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ , et  $(-1, 0)$

b)  $3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 0$

$$x^2(3x + 1) - 4(3x + 1) = 0$$

$$(3x + 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$(3x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 2, x_3 = -2$$

**Solution(s) :**  $(-\frac{1}{3}, 0)$ ,  $(2, 0)$ , et  $(-2, 0)$

**Méthodes de factorisation :**

- Division longue et division synthétique
- Factorisation par groupement
- Différence de carrés :  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- Mise en évidence simple
- Factorisation de trinômes (somme et produit)
- Somme et différence de cubes :  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ,  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

### Exemple 3 :

a) Utilisez le théorème du facteur pour résoudre  $0 = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

Les valeurs possibles de  $b$  sont :  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Les valeurs possibles pour  $a$  sont :  $\pm 1, \pm 2$

Les valeurs possibles pour  $\frac{b}{a} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 6$

$f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 11(2) - 6 = 0, \therefore x - 2$  est un facteur

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 3 & -11 & -6 \\ & & 4 & 14 & 6 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$$f(x) = (x - 2)(2x^2 + 7x + 3)$$

$$0 = (x - 2)[(2x^2 + 6x) + (1x + 3)]$$

$$0 = (x - 2)[2x(x + 3) + 1(x + 3)]$$

$$0 = (x - 2)(x + 3)(2x + 1)$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 2$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = -3$$

$$2x + 1 = 0 \rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$$

Solution(s) :  $(2, 0)$ ,  $(-3, 0)$ , et  $(-\frac{1}{2}, 0)$

b) Que représentent vos réponses en a) ?

Les valeurs  $2, -\frac{1}{2}$ , et  $-3$  sont les racines de l'équation  $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 0$ , ce qui signifie qu'elles sont les abscisses à l'origine du graphique de la fonction  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ .

**Exemple 4 :** Trouvez les zéros de la fonction polynomiale  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

Les valeurs possibles pour  $b$  sont  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 - 7(-1)^2 + 8(-1) + 12 = 0, \therefore x + 1$  est un facteur

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & -7 & 8 & 12 \\ & & -1 & 3 & 4 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 12 & 0 \\ & x^3 & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$$f(x) = (x + 1)(x^3 - 3x^2 - 4x + 12)$$

$$= (x + 1)[x^2(x - 3) - 4(x - 3)]$$

$$= (x + 1)(x - 3)(x^2 - 4)$$

$$= (x + 1)(x - 3)(x - 2)(x + 2)$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x_3 = 2$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x_4 = -2$$

Solution(s) :  $(-1, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(2, 0)$ , et  $(-2, 0)$

### Exemple 5 :

a) Trouvez les racines de la fonction polynomiale  $f(x) = x^3 + x - 3x^2 - 3$

Commencez par réarranger en ordre décroissant de degré :  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

$$0 = (x^3 - 3x^2) + (x - 3)$$

$$0 = x^2(x - 3) + 1(x - 3)$$

$$0 = (x - 3)(x^2 + 1)$$

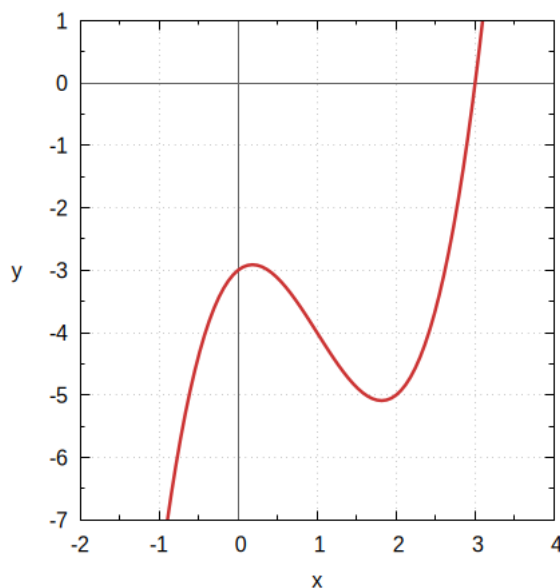
$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm \sqrt{-1} \text{—pas une racine réelle}$$

**Solution(s) :** (3, 0)

**Remarque :** Puisque la racine carrée d'un nombre négatif n'est pas un nombre réel, la seule racine RÉELLE est  $x = 3$ .  $x = \pm \sqrt{-1}$  est considérée comme une racine NON RÉELLE.

b) Utilisez la technologie pour observer le graphique de la fonction  $f(x)$ . Commentez la façon dont les abscisses à l'origine du graphique sont liées aux racines RÉELLES et NON RÉELLES de l'équation.



Les abscisses à l'origine du graphique d'une fonction polynomiale correspondent uniquement aux racines RÉELLES de l'équation polynomiale associée. Il n'y a pas d'abscisses à l'origine sur le graphique qui correspondent aux racines NON RÉELLES de l'équation.

**Exemple 6 :** Trouvez toutes les solutions réelles de chaque équation polynomiale

a)  $0 = 2x^3 - 3x^2 - x - 2$

Les valeurs possibles de  $b$  sont :  $\pm 1, \pm 2$

Les valeurs possibles pour  $a$  sont :  $\pm 1, \pm 2$

Les valeurs possibles pour  $\frac{b}{a} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2$

$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - (2) - 2 = 0, \therefore x - 2 \text{ est un facteur de } f(x)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ & & 4 & 2 & 2 \\ \hline & 2 & 1 & 1 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$$f(x) = (x - 2)(2x^2 + x + 1)$$

$$0 = (x - 2)(2x^2 + x + 1)$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Vérifiez le discriminant de  $2x^2 + x + 1$  pour voir s'il y a d'autres racines réelles :

$$b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(1) = -7 \text{—donc pas de racines réelles}$$

**Solution(s) :** (2, 0)

b)  $0 = 8x^3 + 125$

Indice : Il s'agit d'une somme de cubes  $\rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$g(x) = (2x)^3 + (5)^3$$

$$0 = (2x + 5)(4x^2 - 10x + 25)$$

$$2x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Vérifiez le discriminant de  $4x^2 - 10x + 25$  pour voir s'il y a d'autres racines réelles :

$$b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(4)(25) = -300 \text{—pas de racines réelles}$$

$$\text{Solution(s)} : \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$$