

2.3 Leçon sur le théorème du facteur avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Dans cette section, vous apprendrez à déterminer les facteurs d'une fonction polynomiale de degré 3 ou plus.

Partie 1 : Retour sur le théorème du reste

a) Utilisez le théorème du reste pour déterminer le reste lorsque $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ est divisé par $x + 2$

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 + 4(-2)^2 + (-2) - 6 \\ &= -8 + 16 - 2 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le reste de la division par $x + 2$ est 0. Cela signifie que $x + 2$ est un facteur du dividende.

Théorème du reste : Lorsqu'une fonction polynomiale $P(x)$ est divisée par $x - b$, le reste est $P(b)$; et lorsqu'elle est divisée par $ax - b$, le reste est $P\left(\frac{b}{a}\right)$, où a et b sont des entiers, et $a \neq 0$.

b) Vérifiez votre réponse en a) en effectuant la division à l'aide de la division longue ou de la division synthétique.

Remarque : j'ai choisi la division synthétique puisqu'il s'agit d'un diviseur linéaire de la forme $x - b$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & -2 & -4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \\ & x^2 & x & R & \end{array}$$

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x + 2)(x^2 + 2x - 3)$$

Théorème du facteur : $x - b$ est un facteur d'un polynôme $P(x)$ si et seulement si $P(b) = 0$. De même, $ax - b$ est un facteur de $P(x)$ si et seulement si $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$.

Exemple 1 : Déterminez si $x - 3$ et $x + 2$ sont des facteurs de $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

$$\begin{aligned} P(3) &= (3)^3 - (3)^2 - 14(3) + 24 \\ &= 27 - 9 - 42 + 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque le reste est 0, $x - 3$ divise $P(x)$ exactement ; cela signifie que $x - 3$ est un facteur de $P(x)$.

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^3 - (-2)^2 - 14(-2) + 24 \\ &= -8 - 4 + 28 + 24 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Puisque le reste n'est pas 0, $x + 2$ ne divise pas $P(x)$ exactement ; cela signifie que $x + 2$ n'est pas un facteur de $P(x)$.

Partie 2 : Comment déterminer un facteur d'un polynôme dont le coefficient dominant est 1

Vous pourriez deviner et vérifier des valeurs de b qui font $P(b) = 0$ jusqu'à en trouver une qui fonctionne...

Ou vous pouvez utiliser le théorème du zéro entier pour vous aider.

Théorème du zéro entier : Si $x - b$ est un facteur d'une fonction polynomiale $P(x)$ dont le coefficient dominant est 1 et dont les autres coefficients sont des entiers, alors b est un facteur du terme constant de $P(x)$.

Remarque : Une fois qu'un des facteurs d'un polynôme est trouvé, la division est utilisée pour déterminer les autres facteurs.

Exemple 2 : Factorisez complètement $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

$$\text{Soit } P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

Trouvez une valeur de b telle que $P(b) = 0$. D'après le théorème du facteur, si $P(b) = 0$, alors on sait que $x - b$ est un facteur. On peut ensuite diviser $P(x)$ par ce facteur.

2.3 Leçon sur le théorème du facteur avec solutions

Le théorème du zéro entier nous indique de tester les facteurs de -6 .

Testez ± 1 , ± 2 , ± 3 , et ± 6 . Une fois qu'un facteur est trouvé, vous pouvez arrêter de tester et utiliser ce facteur pour diviser $P(x)$.

$$\begin{aligned}P(1) &= (1)^3 + 2(1)^2 - 5(1) - 6 \\&= 1 + 2 - 5 - 6 \\&= -8\end{aligned}$$

Puisque $P(1) \neq 0$, on sait que $x - 1$ n'est PAS un facteur de $P(x)$.

$$\begin{aligned}P(2) &= (2)^3 + 2(2)^2 - 5(2) - 6 \\&= 8 + 8 - 10 - 6 \\&= 0\end{aligned}$$

Puisque $P(2) = 0$, on sait que $x - 2$ est un facteur de $P(x)$.

Vous pouvez maintenant utiliser soit la division longue soit la division synthétique pour trouver les autres facteurs.

Méthode 1 : Division longue

$$\begin{array}{r}x^2 + 4x + 3 \\x - 2 \overline{) x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 4x^2 - 5x \\ \underline{4x^2 - 8x} \\ 3x - 6 \\ \underline{3x - 6} \\ R = 0\end{array}$$

Méthode 2 : Division synthétique

$$\begin{array}{r|rrrr}2 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R\end{array}$$

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$$

$$= (x - 2)(x + 3)(x + 1)$$

Exemple 3 : Factorisez complètement $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$.

Soit $P(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$

Trouvez une valeur de b telle que $P(b) = 0$. D'après le théorème du facteur, si $P(b) = 0$, alors on sait que $x - b$ est un facteur. On peut ensuite diviser $P(x)$ par ce facteur.

Le théorème du zéro entier nous indique de tester les facteurs de -18 .

Testez ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6 , ± 9 , et ± 18 . Une fois qu'un facteur est trouvé, vous pouvez arrêter de tester et utiliser ce facteur pour diviser $P(x)$.

$$\begin{aligned}P(1) &= (1)^4 + 3(1)^3 - 7(1)^2 - 27(1) - 18 \\&= -48\end{aligned}$$

$x - 1$ N'EST PAS un facteur de $P(x)$.

$$\begin{aligned}P(-1) &= (-1)^4 + 3(-1)^3 - 7(-1)^2 - 27(-1) - 18 \\&= 0\end{aligned}$$

$x + 1$ EST un facteur de $P(x)$.

Puisque $P(-1) = 0$, cela nous indique que $x + 1$ est un facteur. Utilisez la division pour déterminer l'autre facteur.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}-1 & 1 & 3 & -7 & -27 & -18 \\ & & -1 & -2 & 9 & 18 \\ \hline & 1 & 2 & -9 & -18 & 0 \\ & x^3 & x^2 & x & \# & R\end{array}$$

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = (x + 1)(x^3 + 2x^2 - 9x - 18)$$

On peut maintenant diviser davantage $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ en utilisant à nouveau la division ou en factorisant par groupement.

Méthode 1 : Division

Testez les facteurs de -18

$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 9(-2) - 18 \\ = 0$$

$x + 2$ est un facteur

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & -9 & -18 \\ & & -2 & 0 & 18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = (x + 1)(x + 2)(x^2 - 9) \\ = (x + 1)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$$

Méthode 2 : Factorisation par groupement

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$$

Groupez les 2 premiers termes et les 2 derniers termes, et séparez-les par un signe d'addition.

$$f(x) = (x^3 + 2x^2) + (-9x - 18)$$

Mettez en évidence le facteur commun de chaque groupe

$$f(x) = x^2(x + 2) - 9(x + 2)$$

Mettez en évidence le binôme commun

$$f(x) = (x + 2)(x^2 - 9)$$

Par conséquent,

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = (x + 1)(x^3 + 2x^2 - 9x - 18) \\ = (x + 1)(x + 2)(x^2 - 9) \\ = (x + 1)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$$

Exemple 4 : Essayez à nouveau la factorisation par groupement

$$x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 12x$$

Remarque : La factorisation par groupement ne fonctionne pas toujours... mais quand elle fonctionne, elle vous fait gagner du temps !

$$= (x^4 - 6x^3) + (2x^2 - 12x) \\ = x^3(x - 6) + 2x(x - 6) \\ = (x - 6)(x^3 + 2x) \\ = (x - 6)(x)(x^2 + 2)$$

Partie 3 : Comment déterminer un facteur d'un polynôme dont le coefficient dominant n'est PAS 1

Le théorème du zéro entier peut être étendu pour inclure les polynômes dont le coefficient dominant n'est pas 1. Cette extension est connue sous le nom de théorème du zéro rationnel.

Théorème du zéro rationnel : Supposons que $P(x)$ est une fonction polynomiale à coefficients entiers et que $x = \frac{b}{a}$ est un zéro de $P(x)$, où a et b sont des entiers et $a \neq 0$. Alors,

- b est un facteur du terme constant de $P(x)$
- a est un facteur du coefficient dominant de $P(x)$
- $(ax - b)$ est un facteur de $P(x)$

Exemple 5 : Factorisez $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

On doit commencer par trouver une valeur de $\frac{b}{a}$ où $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$.

b doit être un facteur du terme constant. Les valeurs possibles pour b sont : $\pm 1, \pm 2$

a doit être un facteur du coefficient dominant. Les valeurs possibles de a sont : $\pm 1, \pm 3$

Par conséquent, les valeurs possibles pour $\frac{b}{a}$ sont : $\pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}$

Testez des valeurs de $\frac{b}{a}$ pour x dans $P(x)$ afin de trouver un zéro.

$$P(1) = 3(1)^3 + 2(1)^2 - 7(1) + 2 = 0$$

Puisque $P(1) = 0$, $x - 1$ est un facteur de $P(x)$. Utilisez la division pour trouver les autres facteurs.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 2 & -7 & 2 \\ & & 3 & 5 & -2 \\ \hline & 3 & 5 & -2 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = (x - 1)(3x^2 + 5x - 2)$$

$$= (x - 1)[(3x^2 + 6x) + (-1x - 2)]$$

$$= (x - 1)[3x(x + 2) - 1(x + 2)]$$

$$= (x - 1)(x + 2)(3x - 1)$$

Exemple 6 : Factorisez $P(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$

Les valeurs possibles pour b sont : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Les valeurs possibles de a sont : $\pm 1, \pm 2$

Par conséquent, les valeurs possibles pour $\frac{b}{a}$ sont : $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 6$

$$f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 7(-1) - 6 = 0$$

Par conséquent, $x + 1$ est un facteur de $P(x)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 1 & -7 & -6 \\ & & -2 & 1 & 6 \\ \hline & 2 & -1 & -6 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = (x + 1)(2x^2 - x - 6)$$

$$= (x + 1)[(2x^2 - 4x) + (3x - 6)]$$

$$= (x + 1)[2x(x - 2) + 3(x - 2)]$$

$$= (x + 1)(x - 2)(2x + 3)$$

Partie 4 : Question d'application

Exemple 7 : Lorsque $f(x) = 2x^3 - mx^2 + nx - 2$ est divisé par $x + 1$, le reste est -12 et $x - 2$ est un facteur. Déterminez les valeurs de m et n .

Indice : Utilisez les renseignements donnés pour créer 2 équations, puis utilisez la substitution ou l'élimination pour résoudre.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2(-1)^3 - m(-1)^2 + n(-1) - 2 \\ -12 &= -2 - m - n - 2 \\ -8 &= -m - n \end{aligned}$$

Équation (1) : $-8 = -m - n$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2(2)^3 - m(2)^2 + n(2) - 2 \\ 0 &= 16 - 4m + 2n - 2 \\ -14 &= -4m + 2n \end{aligned}$$

Équation (2) : $-14 = -4m + 2n$

Multipliez l'équation (1) par 2 : $-16 = -2m - 2n$

Additionnez ceci à l'équation (2) : $-14 = -4m + 2n$

$$-30 = -6m$$

$$5 = m$$

Substituez $m = 5$ dans l'équation (1) ou (2) :

$$-8 = -5 - n$$

$$n = 3$$

Donc $m = 5$ et $n = 3$