

1.5 Leçon sur la symétrie des fonctions polynomiales avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Dans cette section, vous apprendrez les propriétés des fonctions polynomiales paires et impaires.

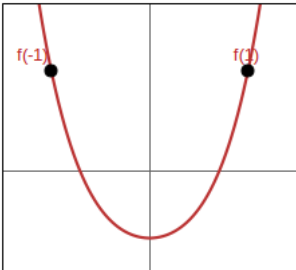
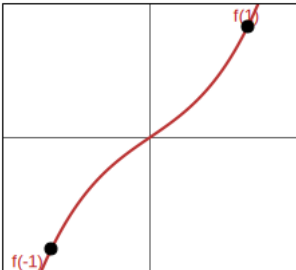
Symétrie des fonctions polynomiales

Symétrie par rapport à une droite – il existe une droite verticale par rapport à laquelle le polynôme reste inchangé lorsqu'il est réfléchi.

Symétrie par rapport à un point / Symétrie de rotation – il existe un point autour duquel le polynôme reste inchangé lorsqu'il est tourné de 180°

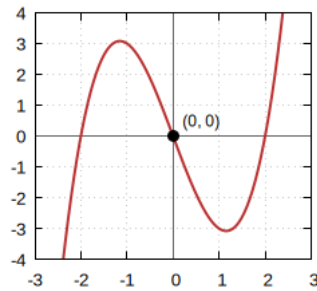
Section 1 : Propriétés des fonctions paires et impaires

Une fonction polynomiale de degré pair ou impair n'est PAS nécessairement une fonction paire ou impaire. Voici les propriétés de toutes les fonctions paires et impaires :

Fonctions paires	Fonctions impaires
Une fonction polynomiale de degré pair est une FONCTION PAIRE si : • Symétrie par rapport à l'axe des y • L'exposant de chaque terme est pair • Peut avoir un terme constant	Une fonction polynomiale de degré impair est une FONCTION IMPAIRE si : • Symétrie par rapport à l'origine $(0, 0)$ • L'exposant de chaque terme est impair • Aucun terme constant
Règle : $f(-x) = f(x)$	Règle : $-f(x) = f(-x)$
Exemple :  $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2$ Remarquez : $f(1) = 3$ $f(-1) = 3$ $\therefore f(1) = f(-1)$	Exemple :  $f(x) = 2x^3 + 3x$ Remarquez : $f(1) = 5$ $f(-1) = -5$ $\therefore -f(1) = f(-1)$

Exemple 1 : Déterminez si chaque fonction est une fonction paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre. Expliquez comment vous pouvez le savoir.

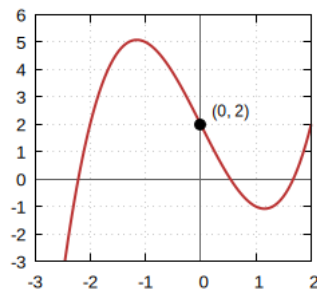
a) $y = x^3 - 4x$



C'est une **fonction impaire** car :

- Elle a une symétrie par rapport à l'origine
- Tous les termes de l'équation ont un exposant impair et il n'y a pas de terme constant

b) $y = x^3 - 4x + 2$

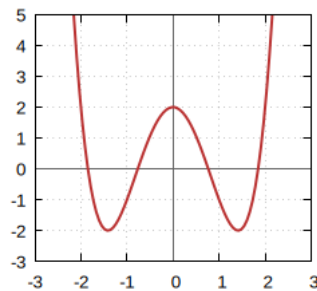


Ni l'une ni l'autre

Cette fonction a une symétrie par rapport à un point. Cependant, l'origine n'est pas le point par rapport auquel la fonction est symétrique. Par conséquent, ce n'est pas une fonction paire ou impaire.

À partir de l'équation, nous pouvons voir que ce n'est PAS une fonction impaire car il y a un terme constant.

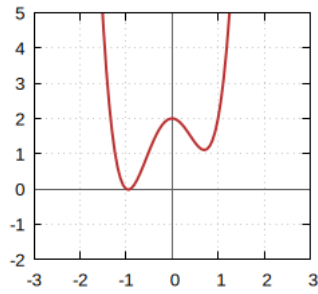
c) $y = x^4 - 4x^2 + 2$



C'est une **fonction paire** car :

- Elle a une symétrie par rapport à l'axe des y
- Tous les termes de l'équation ont un exposant pair. Les fonctions paires peuvent avoir un terme constant.

d) $y = 3x^4 + x^3 - 4x^2 + 2$

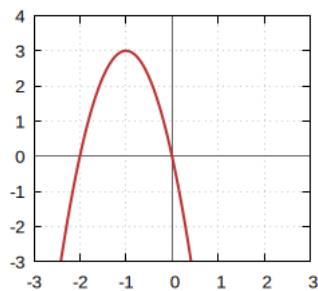


Ni l'une ni l'autre

Cette fonction n'a pas de symétrie par rapport à une droite ou à un point.

À partir de l'équation, nous pouvons voir que ce n'est PAS une fonction paire ou impaire car il y a un mélange d'exposants pairs et impairs.

e) $y = -3x^2 - 6x$



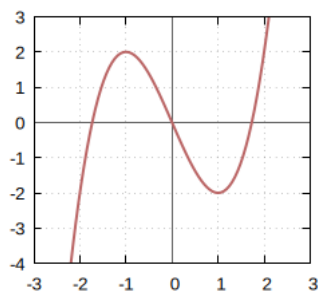
Ni l'une ni l'autre

Cette fonction a une symétrie par rapport à une droite. Cependant, l'axe des y n'est pas la droite par rapport à laquelle la fonction est symétrique. Par conséquent, ce n'est pas une fonction paire ou impaire.

À partir de l'équation, nous pouvons voir que ce n'est PAS une fonction paire ou impaire car il y a un mélange d'exposants pairs et impairs.

Exemple 2 : Cochez toutes les réponses qui s'appliquent à chaque fonction

a)



i) aucune symétrie

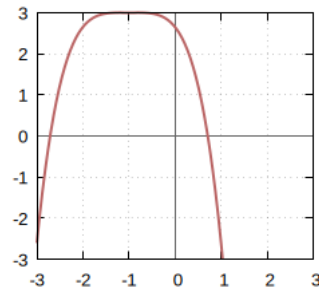
ii) symétrie par rapport à un point

iii) symétrie par rapport à une droite

iv) fonction impaire

v) fonction paire

b)



i) aucune symétrie

ii) symétrie par rapport à un point

iii) symétrie par rapport à une droite

iv) fonction impaire

v) fonction paire

Cette fonction n'a pas de symétrie par rapport à une droite ou à un point. À partir de l'équation, nous pouvons voir que ce n'est PAS une fonction paire ou impaire car il y a un mélange d'exposants pairs et impairs.

c) $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 2$

i) aucune symétrie

ii) symétrie par rapport à un point

iii) symétrie par rapport à une droite

iv) fonction impaire

v) fonction paire

Remarque : toutes les fonctions cubiques ont une symétrie par rapport à un point

d) $P(x) = x^6 + x^2 - 11$

i) aucune symétrie

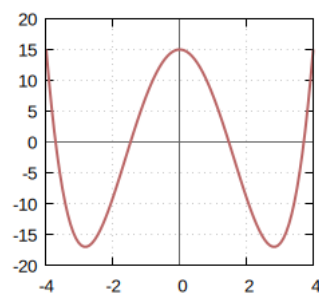
ii) symétrie par rapport à un point

iii) symétrie par rapport à une droite

iv) fonction impaire

v) fonction paire

e)



i) aucune symétrie

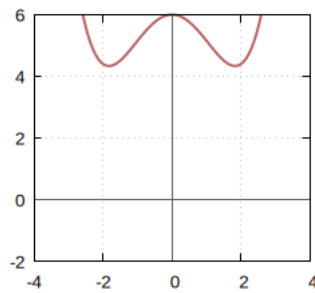
ii) symétrie par rapport à un point

iii) symétrie par rapport à une droite

iv) fonction impaire

v) fonction paire

f)



- i) aucune symétrie
- ii) symétrie par rapport à un point
- iii) symétrie par rapport à une droite
- iv) fonction impaire
- v) fonction paire

g) $P(x) = 5x^5 - 4x^3 + 8x$

- i) aucune symétrie
- ii) symétrie par rapport à un point
- iii) symétrie par rapport à une droite
- iv) fonction impaire
- v) fonction paire

Exemple 3 : Sans tracer le graphique, déterminez si chaque fonction polynomiale a une symétrie par rapport à l'axe des y , une symétrie par rapport à l'origine, ou ni l'une ni l'autre. Vérifiez votre réponse algébriquement.

a) $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 4$

La fonction est paire puisque l'exposant de chaque terme est pair. La fonction a une symétrie par rapport à l'axe des y .

Vérifiez $f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 \\ f(-x) &= 2x^4 - 5x^2 + 4 \end{aligned}$$

Donc $f(-x) = f(x)$.

b) $f(x) = -3x^5 + 9x^3 + 2x$

La fonction est impaire puisque l'exposant de chaque terme est impair. La fonction a une symétrie par rapport à l'origine.

Vérifiez $-f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} -f(x) &= -(-3x^5 + 9x^3 + 2x) = 3x^5 - 9x^3 - 2x \\ f(-x) &= -3(-x)^5 + 9(-x)^3 + 2(-x) = 3x^5 - 9x^3 - 2x \end{aligned}$$

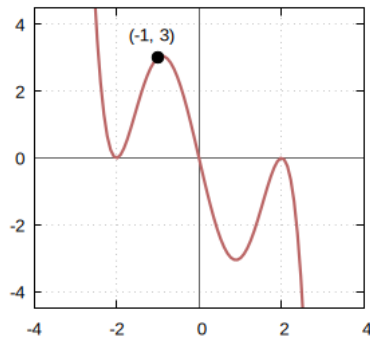
Donc $-f(x) = f(-x)$.

c) $x^6 - 4x^3 + 6x^2 - 4$

Certains exposants sont pairs et d'autres impairs, donc la fonction n'est ni paire ni impaire. Elle n'a pas de symétrie par rapport à l'axe des y ni de symétrie par rapport à l'origine.

Section 2 : Liens avec l'ensemble de l'unité

Exemple 4 : Utilisez le graphique donné pour indiquer :



a) les zéros

Les zéros sont -2 (ordre 2), 0 (ordre 1), et 2 (ordre 2)

b) le nombre de points tournants

2 minimums locaux et 2 maximums locaux

4 points tournants

c) le degré minimal possible

Le degré minimal possible est 5

d) toute symétrie présente

Symétrie par rapport à l'origine. Par conséquent, c'est une fonction impaire.

e) les intervalles où $f(x) < 0$

La fonction est négative sur $(0, 2) \cup (2, \infty)$

f) Déterminez l'équation sous forme factorisée

$$P(x) = k(x)(x+2)^2(x-2)^2$$

En substituant le point $(-1, 3)$:

$$3 = k(-1)(-1+2)^2(-1-2)^2 = k(-1)(1)^2(-3)^2 = -9k$$

$$k = -\frac{1}{3}$$

$$P(x) = -\frac{1}{3}x(x+2)^2(x-2)^2$$