

1.3 Leçon sur la forme factorisée des fonctions polynomiales avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Dans cette section, vous étudierez la relation entre la forme factorisée d'une fonction polynomiale et les zéros du graphique correspondant, et vous examinerez l'effet des facteurs répétés sur le graphique d'une fonction polynomiale.

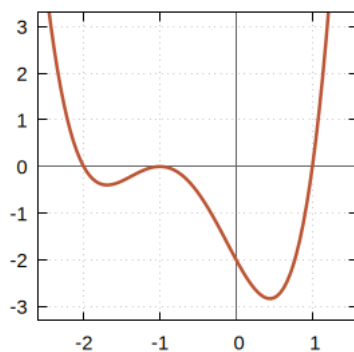
Investigation : forme factorisée

Si nous voulons tracer avec précision le graphique de la fonction polynomiale $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$, il serait plus utile d'examiner la version factorisée de la fonction :

$$f(x) = (x + 1)^2(x + 2)(x - 1)$$

Commençons par examiner le graphique de la fonction et établir des liens avec l'équation sous forme factorisée.

Graphique de $f(x)$:



À partir du graphique, répondez aux questions suivantes...

- Quel est le degré de la fonction ? **4**
- Quel est le signe du coefficient dominant ? **Positif**
- Quels sont les zéros ? **-2, -1, 1**
- Quelle est l'ordonnée à l'origine ? **-2**
- Les zéros divisent le graphique en quatre intervalles. Écrivez les intervalles dans la première rangée du tableau. Dans la deuxième rangée, choisissez un point d'essai dans l'intervalle. Dans la troisième rangée, indiquez si la fonction est positive (au-dessus de l'axe des x) ou négative (au-dessous de l'axe des x).

Intervalle	$x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
Point d'essai	-3	-1.5	0	2
Signe de $f(x)$	Positive	Négative	Négative	Positive

- Qu'arrive-t-il au signe de $f(x)$ près de chaque zéro ?

À $x = -2$ (ordre 1) et $x = 1$ (ordre 1), le signe **change**. À $x = -1$ (ordre 2), le signe **ne change pas** – $f(x)$ est négative des deux côtés.

Conclusions de l'investigation :

Les zéros du graphique de la fonction correspondent aux racines (zéros) de l'équation correspondante. Par exemple, la fonction $f(x) = (x - 2)(x + 1)$ a des zéros à **2** et **-1**. Ce sont les racines de l'équation $(x - 2)(x + 1) = 0$.

1.3 Leçon sur la forme factorisée des fonctions polynomiales avec solutions

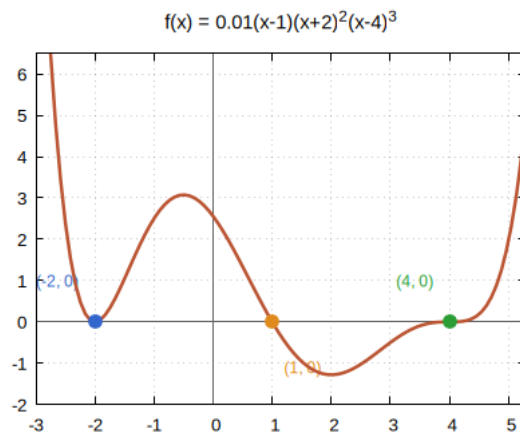
Si une fonction polynomiale a un facteur $(x - a)$ qui est répété n fois, alors $x = a$ est un zéro d'ordre n .

Ordre – l'exposant auquel chaque facteur d'une expression algébrique est élevé.

Par exemple, la fonction $f(x) = (x - 3)^2(x - 1)$ a un zéro d'ordre **2** à $x = 3$ et un zéro d'ordre **1** à $x = 1$.

Le graphique d'une fonction polynomiale change de signe aux zéros d'ordre **impair** mais ne change pas de signe aux zéros d'ordre **pair**.

Formes selon l'ordre du zéro :

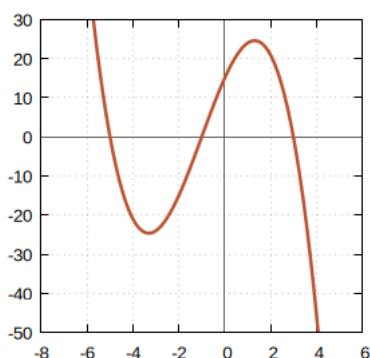


	Ordre 2	Ordre 1	Ordre 3
	(-2, 0) est un zéro d'ordre 2. Par conséquent, il ne change pas de signe. « Rebondit » sur l'axe des x . Forme parabolique.	(1, 0) est un zéro d'ordre 1. Par conséquent, il change de signe. « Passe tout droit » à travers l'axe des x . Forme linéaire.	(4, 0) est un zéro d'ordre 3. Par conséquent, il change de signe. Forme en « S » à travers l'axe des x . Forme cubique.

Exemple 1 : Analyse des graphiques de fonctions polynomiales

Pour chaque graphique,

- i) le degré minimal possible et le signe du coefficient dominant
 - ii) les zéros et les facteurs de la fonction
 - iii) les intervalles où la fonction est positive/négative
- a)

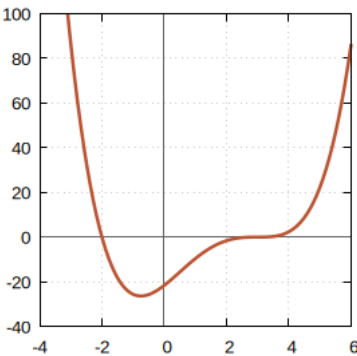


- i) Degré minimal possible : **3**. Signe du coefficient dominant : **négatif**.
- ii) Zéros : **-5, -1, 3**. Facteurs : **$(x+5)$, $(x+1)$, $(x-3)$** – donc $f(x) = -a(x+5)(x+1)(x-3)$ pour un certain a positif.
- iii)

Intervalle	$x < -5$	$-5 < x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
------------	----------	---------------	--------------	---------

Signe de $f(x)$	Positive	Négative	Positive	Négative
-----------------	----------	----------	----------	----------

b)



- i) Degré minimal possible : 4. Signe du coefficient dominant : **positif**.
ii) Zéros : -2 (ordre 1), 3 (ordre 3). Facteurs : $(x+2)$, $(x-3)^3$ – donc $f(x) = a(x+2)(x-3)^3$ pour un certain a positif.
iii)

Intervalle	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$x > 3$
Signe de $f(x)$	Positive	Négative	Positive

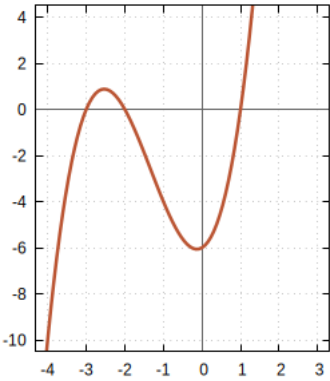
Exemple 2 : Analyser des équations sous forme factorisée pour esquisser des graphiques

Degré	Coefficient dominant	Comportement à l'infini	Zéros	Ordonnée à l'origine
L'exposant de x lorsque tous les facteurs de x sont multipliés ensemble OU Additionnez les exposants des facteurs qui incluent un x .	Le produit de tous les coefficients de x	Utilisez le degré et le signe du coefficient dominant pour déterminer ceci	Posez chaque facteur égal à zéro et résolvez pour x	Posez $x = 0$ et résolvez pour y

Esquissez un graphique de chaque fonction polynomiale :

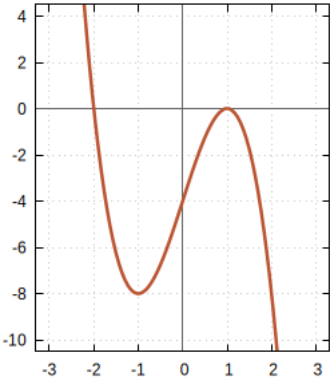
a) $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$

Degré	Coefficient dominant	Comportement à l'infini	Zéros	Ordonnée à l'origine
3	1	$y \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$; $y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$ (Q3 à Q1)	1, -2, -3	-6



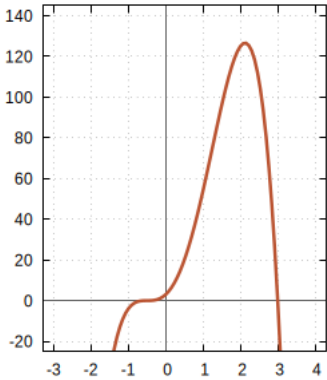
b) $g(x) = -2(x - 1)^2(x + 2)$

Degré	Coefficient dominant	Comportement à l'infini	Zéros	Ordonnée à l'origine
3	-2	$y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$; $y \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$ (Q2 à Q4)	1 (ordre 2), -2 (ordre 1)	-4



c) $h(x) = -(2x + 1)^3(x - 3)$

Degré	Coefficient dominant	Comportement à l'infini	Zéros	Ordonnée à l'origine
4	-8	$y \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow \pm \infty$ (Q3 à Q4)	-0.5 (ordre 3), 3 (ordre 1)	3

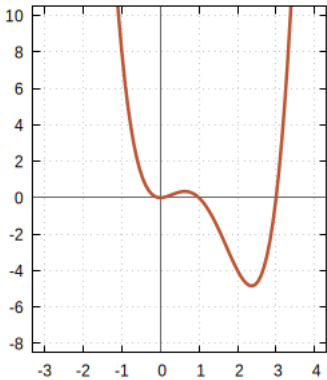


d) $j(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

Remarque : il faut mettre sous forme factorisée pour trouver les zéros

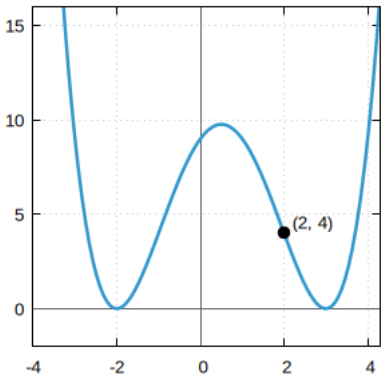
Forme factorisée : $j(x) = x^2(x - 1)(x - 3)$

Degré	Coefficient dominant	Comportement à l'infini	Zéros	Ordonnée à l'origine
4	1	$y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \pm \infty$ (Q2 à Q1)	0 (ordre 2), 1 (ordre 1), 3 (ordre 1)	0



Exemple 3 : Représenter le graphique d’une fonction polynomiale par son équation

a) Écrivez l’équation de la fonction illustrée ci-dessous :



Étapes :

1. Écrivez l'équation de la famille de polynômes à l'aide des facteurs créés à partir des zéros
2. Substituez les coordonnées d'un autre point (x, y) dans l'équation.
3. Résolvez pour a
4. Écrivez l'équation sous forme factorisée

Le graphique touche l'axe des x (sans le traverser) à $x = -2$ et $x = 3$, donc les deux sont des zéros d'ordre 2 :

$$f(x) = a(x + 2)^2(x - 3)^2$$

En substituant le point $(2, 4)$:

$$4 = a(2 + 2)^2(2 - 3)^2 = a(16)(1) = 16a \implies a = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)^2(x - 3)^2$$

b) Déterminez l'équation d'une fonction polynomiale de degré 4 ayant des zéros -1 (ordre 3) et 1 , et une ordonnée à l'origine de -2 .

$$f(x) = a(x + 1)^3(x - 1)$$

En substituant l'ordonnée à l'origine, $f(0) = -2$:

$$-2 = a(0 + 1)^3(0 - 1) = a(1)(-1) = -a \implies a = 2$$

$$f(x) = 2(x + 1)^3(x - 1)$$