

1.2 Leçon sur les caractéristiques des fonctions polynomiales avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

À la section 1.1, nous avons étudié les fonctions puissance polynomiales, qui sont des fonctions polynomiales à un seul terme. Plusieurs fonctions polynomiales sont composées de deux termes ou plus. Dans cette section, nous étudierons les caractéristiques des graphiques et des équations des fonctions polynomiales.

Nouvelle terminologie – Minimum/maximum local et absolu

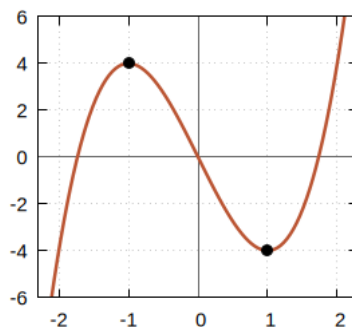
- **Point minimum ou maximum local** – Points qui sont des minimums ou des maximums sur un certain intervalle autour de ce point.
- **Maximum ou minimum absolu** – La plus grande/petite valeur atteinte par une fonction pour TOUTES les valeurs de son domaine.

Investigation : graphiques de fonctions polynomiales

Le degré et le coefficient dominant dans l'équation d'une fonction polynomiale indiquent le comportement à l'infini du graphique.

Le degré d'une fonction polynomiale fournit de l'information sur la forme, les points tournants (minimums/maximums locaux) et les zéros (abscisses à l'origine) du graphique.

Dans le graphique ci-dessous, $(-1, 4)$ est un **maximum local** et $(1, -4)$ est un **minimum local**. Ce ne sont pas des points minimum et maximum absolus, car il existe d'autres points sur le graphique de la fonction qui sont plus petits et plus grands. On appelle parfois les points minimum et maximum locaux des **points tournants**.

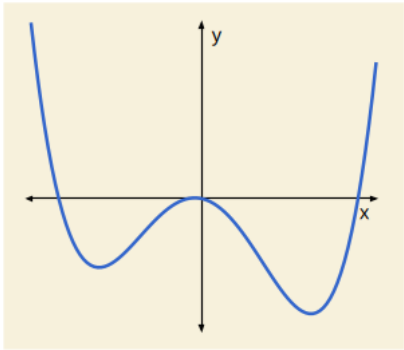


1.2 Leçon sur les caractéristiques des fonctions polynomiales avec solutions

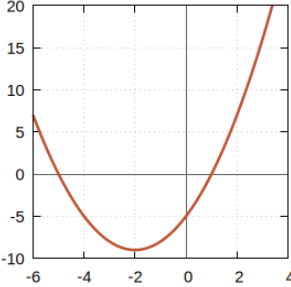
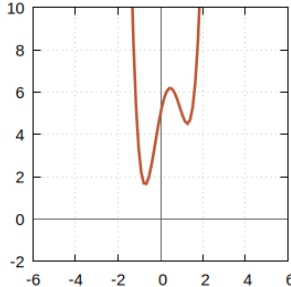
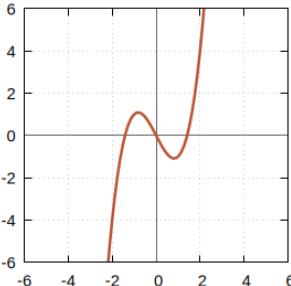
Sur le graphique ci-dessous...

Il y a 3 points minimum/maximum locaux. 2 sont des minimums locaux et 1 est un maximum local.

Un des points minimum locaux est aussi un minimum absolu (celui de droite).



Complétez le tableau suivant à l’aide de l’équation et des graphiques donnés :

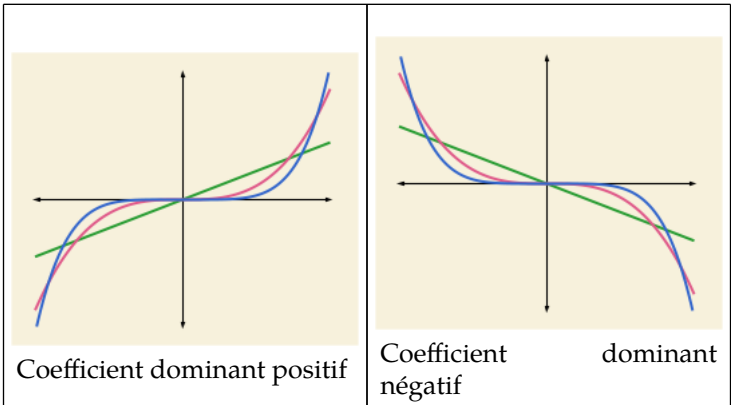
Équation et graphique	Degré	Degré pair ou impair ?	Coefficient dominant	Comportement à l’infini	Nombre de points tournants	Nombre de zéros
$f(x) = x^2 + 4x - 5$ 	2	Pair	1	$y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \pm \infty$ (Q2 à Q1)	1	2
$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 5x + 5$ 	4	Pair	3	$y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \pm \infty$ (Q2 à Q1)	3	0
$f(x) = x^3 - 2x$ 	3	Impair	1	$y \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$; $y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$ (Q3 à Q1)	2	3

$f(x) = -x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x$ 	4	Pair	-1	$y \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow \pm \infty$ (Q3 à Q4)	3	4
$f(x) = 2x^6 - 12x^4 + 18x^2 + x - 10$ 	6	Pair	2	$y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \pm \infty$ (Q2 à Q1)	5	2
$f(x) = 2x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 18x^2 + 5$ 	5	Impair	2	$y \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$; $y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$ (Q3 à Q1)	4	5

Résumé des observations :

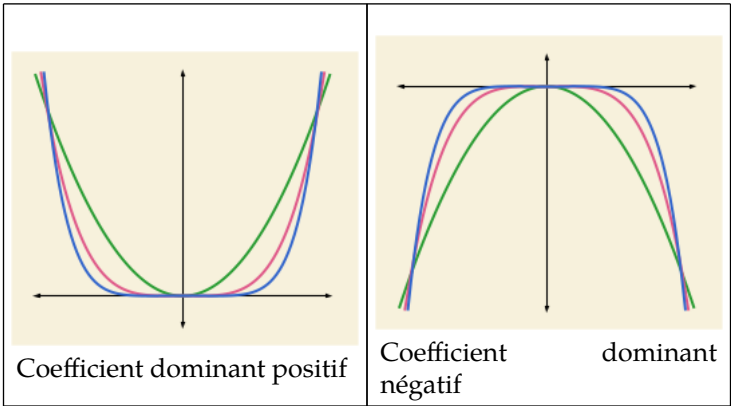
- Une fonction polynomiale de degré n a au plus $n - 1$ points minimum/maximum (points tournants)
- Une fonction polynomiale de degré n peut avoir jusqu'à n zéros distincts (abscisses à l'origine)
- Si une fonction polynomiale est de degré **impair**, elle doit avoir au moins un zéro, et un nombre pair de points tournants
- Si une fonction polynomiale est de degré **pair**, elle peut n'avoir aucun zéro, et un nombre impair de points tournants

- Une fonction polynomiale de degré impair s’étend...
 - du quadrant Q3 au quadrant Q1 si son coefficient dominant est positif
 - du quadrant Q2 au quadrant Q4 si son coefficient dominant est négatif



Remarque : Les polynômes de degré impair ont des comportements à l’infini OPPOSÉS

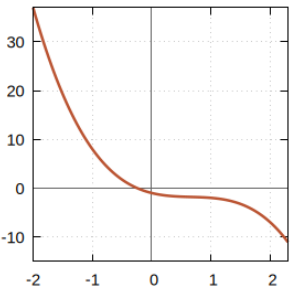
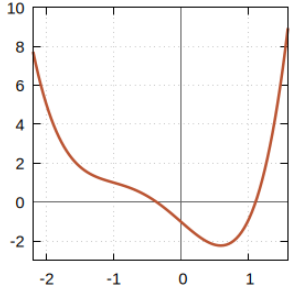
- Une fonction polynomiale de degré pair s’étend...
 - du quadrant Q2 au quadrant Q1 si son coefficient dominant est positif
 - du quadrant Q3 au quadrant Q4 si son coefficient dominant est négatif



Remarque : Les polynômes de degré pair ont LE MÊME comportement à l’infini

Équation et graphique	Degré	Degré pair ou impair ?	Coefficient dominant	Comportement à l’infini	Nombre de points tournants	Nombre de zéros
$f(x) = 5x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x$ 	5	Impair	5	$y \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$; $y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$ (Q3 à Q1)	2	3

1.2 Leçon sur les caractéristiques des fonctions polynomiales avec solutions

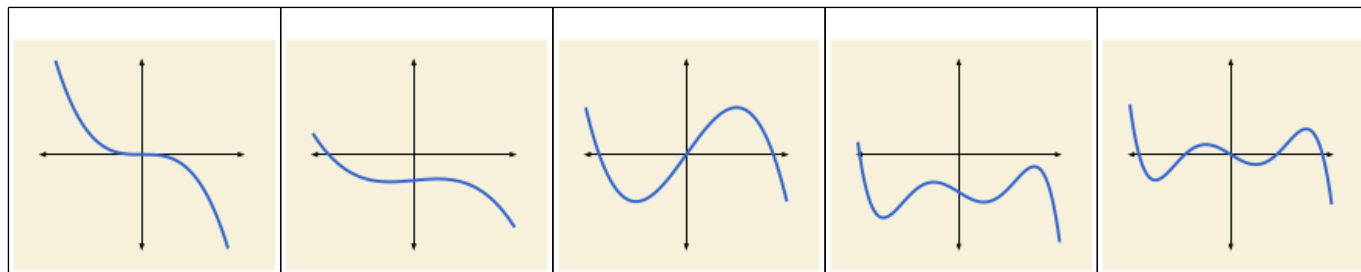
$f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$ 	3	Impair	-2	$y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$; $y \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$ (Q2 à Q4)	0	1
$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x - 1$ 	4	Pair	1	$y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \pm \infty$ (Q2 à Q1)	1	2

Exemple 1 : Décrivez le comportement à l'infini de chaque fonction, le nombre possible de points tournants, et le nombre possible de zéros. Utilisez ces caractéristiques pour esquisser des graphiques possibles de la fonction

a) $f(x) = -3x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 7x - 5$

Degré 5 (impair), coefficient dominant -3 (négatif). Comportement à l'infini : $y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$; $y \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$ (s'étend de Q2 à Q4). Nombre possible de points tournants : 0, 2 ou 4. Nombre possible de zéros : 1, 3 ou 5.

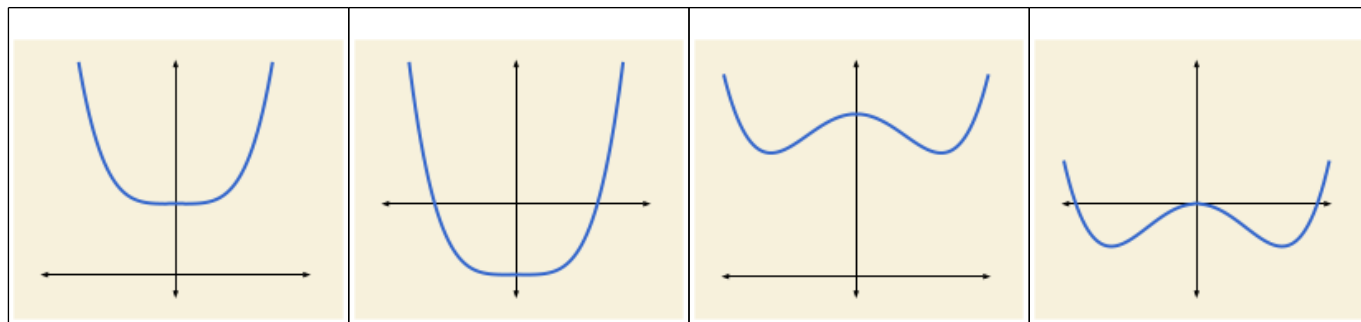
Graphiques possibles de fonctions polynomiales de degré 5 à coefficient dominant négatif :



b) $g(x) = 2x^4 + x^2 + 2$

Degré 4 (pair), coefficient dominant 2 (positif). Comportement à l'infini : $y \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \pm \infty$ (s'étend de Q2 à Q1). Nombre possible de points tournants : 1 ou 3. Nombre possible de zéros : 0, 2 ou 4.

Graphiques possibles de fonctions polynomiales de degré 4 à coefficient dominant positif :



Exemple 2 : Remplissez le tableau suivant

Degré	Nombre possible de zéros	Nombre possible de points tournants
1	1	0
2	2	1
3	3	2
4	4	3
5	5	4

Remarque : Les fonctions de degré impair doivent avoir un nombre pair de points tournants.

Remarque : Les fonctions de degré pair doivent avoir un nombre impair de points tournants.

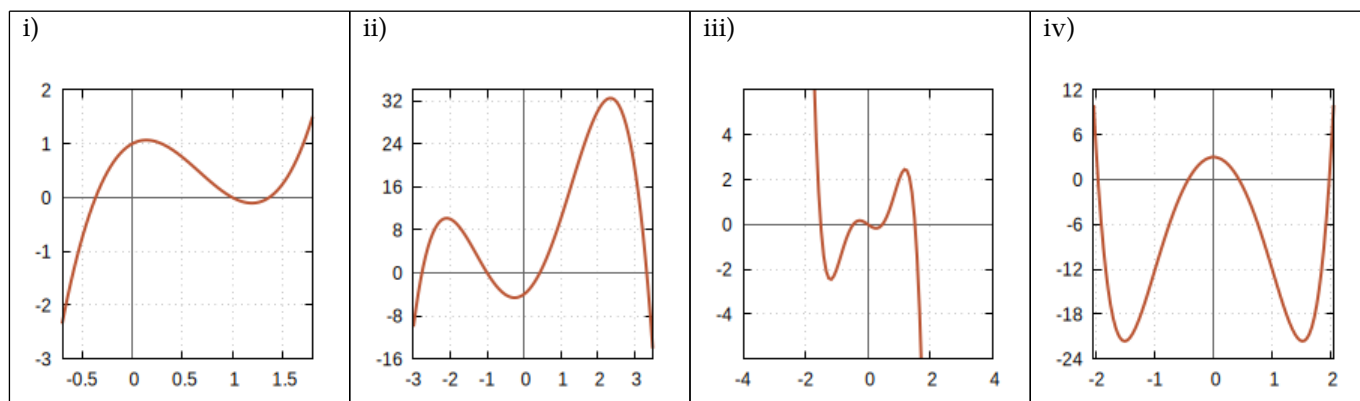
Exemple 3 : Déterminez les caractéristiques clés du graphique de chaque fonction polynomiale. Utilisez ces caractéristiques pour associer chaque fonction à son graphique. Indiquez le nombre de zéros (abscisses à l'origine), le nombre de minimums/maximums locaux, et le nombre de minimums/maximums absolus pour le graphique de chaque fonction. Comment ces caractéristiques sont-elles liées au degré de chaque fonction ?

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 1$

b) $g(x) = -x^4 + 10x^2 + 5x - 4$

c) $h(x) = -2x^5 + 5x^3 - x$

d) $p(x) = x^6 - 16x^2 + 3$



a) Correspond à i). 3 zéros, 2 minimums/maximums locaux (1 maximum local, 1 minimum local), 0 minimum/maximum absolu. Degré impair (3) : non bornée dans les deux directions, donc aucun extremum absolu.

b) Correspond à ii). 4 zéros, 3 minimums/maximums locaux (2 maximums locaux, 1 minimum local), 1 maximum absolu (le plus grand des deux maximums locaux; aucun minimum absolu). Degré pair (4) à coefficient dominant négatif : bornée supérieurement, ce qui donne un maximum absolu.

c) Correspond à iii). 5 zéros, 4 minimums/maximums locaux, 0 minimum/maximum absolu. Degré impair (5) : non bornée dans les deux directions, donc aucun extremum absolu.

d) Correspond à iv). 4 zéros, 3 minimums/maximums locaux (1 maximum local, 2 minimums locaux), 2 minimums absolus (les deux minimums locaux sont égaux, par symétrie; aucun maximum absolu). Degré pair (6) à coefficient dominant positif : bornée inférieurement, ce qui donne un minimum absolu.

En général : le nombre maximal possible de points tournants est un de moins que le degré, et le nombre maximal possible de zéros est égal au degré. Les extremums absolus n'existent que pour les fonctions de degré pair, puisque ce sont les seules à être bornées dans une direction (les fonctions de degré impair s'étendent toujours vers $+\infty$ et vers $-\infty$).

Différences finies

Pour une fonction polynomiale de degré n , où n est un entier positif, les différences n -ièmes...

- sont égales
- ont le même signe que le coefficient dominant

- sont égales à $a \cdot n!$, où a est le coefficient dominant

Remarque :

- $n!$ se lit « n factorielle ».
- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$
- $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Exemple 4 : Le tableau de valeurs représente une fonction polynomiale. Utilisez les différences finies pour déterminer

- le degré de la fonction polynomiale
- le signe du coefficient dominant
- la valeur du coefficient dominant

x	y	Premières différences	Deuxièmes différences	Troisièmes différences
-3	-36	S.O.	S.O.	S.O.
-2	-12	24	S.O.	S.O.
-1	-2	10	-14	S.O.
0	0	2	-8	6
1	0	0	-2	6
2	4	4	4	6
3	18	14	10	6
4	48	30	16	6

- Les troisièmes différences sont constantes, donc le degré est 3.
- Les différences constantes (6) sont positives, donc le coefficient dominant est positif.
- Différences troisièmes constantes $= a \cdot 3! = 6a = 6$, donc $a = 1$

Exemple 5 : Pour la fonction $2x^4 - 4x^2 + x + 1$, quelle est la valeur des différences finies constantes ?

Différences finies $= a \cdot n! = 2 \cdot 4! = 2 \times 24 = 48$