

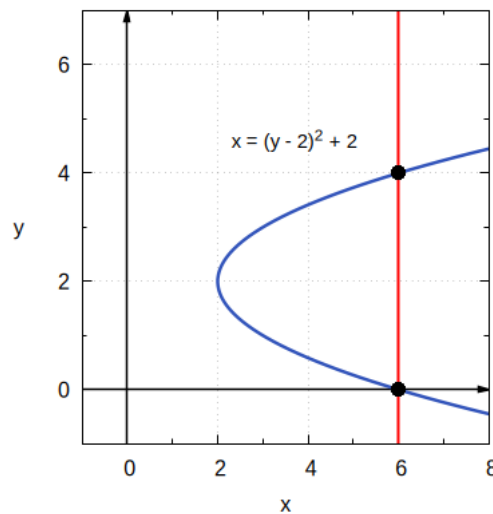
1.1 Leçon sur les fonctions puissance polynomiales avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

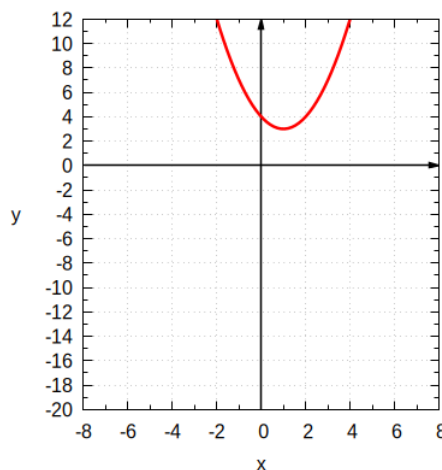
Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Rappels sur les fonctions

- Une relation est une fonction si, pour chaque valeur de x , il n'y a qu'une seule valeur de y correspondante. Le graphique d'une relation représente une fonction s'il réussit le **test de la droite verticale**, c'est-à-dire si une droite verticale tracée n'importe où sur le graphique coupe ce graphique en au plus un point.

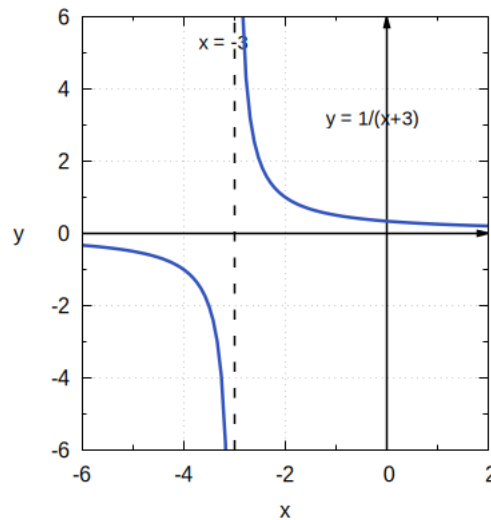


- Le **domaine** d'une fonction est l'ensemble complet de toutes les valeurs possibles de la variable indépendante (x)
 - Ensemble de toutes les valeurs possibles de x qui donneront des valeurs réelles de y
- L'**image** d'une fonction est l'ensemble complet de toutes les valeurs résultantes possibles de la variable dépendante (y)
 - Ensemble de toutes les valeurs possibles de y obtenues après avoir substitué toutes les valeurs possibles de x
- Pour la fonction $f(x) = (x - 1)^2 + 3$



- Le degré d'une fonction est l'exposant le plus élevé dans l'expression
 - $f(x) = 6x^3 - 3x^2 + 4x - 9$ a un degré de 3.
- Une **asymptote** est une droite dont une courbe se rapproche de plus en plus sans jamais la toucher.

La fonction $y = \frac{1}{x+3}$ a deux asymptotes :



Asymptote verticale : La division par zéro n'est pas définie. Par conséquent, l'expression au dénominateur de la fonction ne peut pas être nulle. Donc $x \neq -3$. C'est pourquoi la droite verticale $x = -3$ est une asymptote de cette fonction.

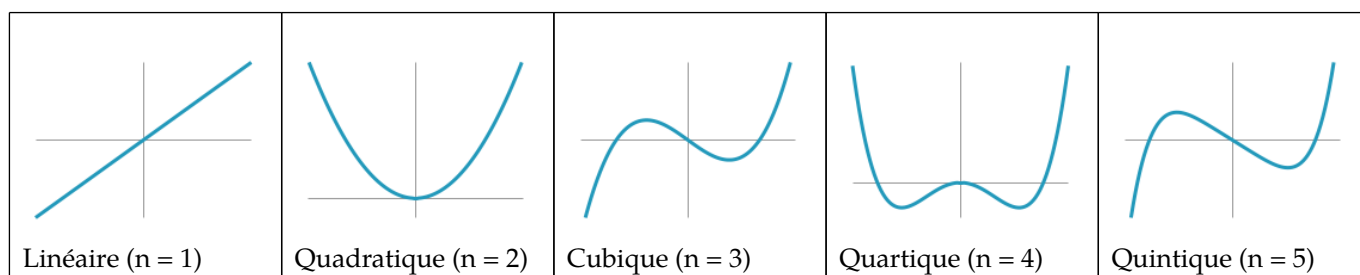
Asymptote horizontale : Pour l'image, il ne peut jamais y avoir de situation où le résultat de la division est nul. Par conséquent, la droite $y = 0$ est une asymptote horizontale. Pour toutes les fonctions où le dénominateur est de degré supérieur au numérateur, il y aura une asymptote horizontale en $y = 0$.

Fonctions polynomiales

Une fonction polynomiale a la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

- n est un nombre naturel
- x est une variable
- les **coefficients** $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels
- le **degré** de la fonction est n , l'exposant de la plus grande puissance de x
- a_n , le coefficient de la plus grande puissance de x , est le **coefficient dominant**
- a_0 , le terme sans variable, est le **terme constant**
- Le domaine d'une fonction polynomiale est l'ensemble des nombres réels $(-\infty, \infty)$
- L'image d'une fonction polynomiale peut être l'ensemble des nombres réels, ou elle peut avoir une borne inférieure ou une borne supérieure (mais pas les deux)
- Le graphique des fonctions polynomiales n'a pas d'asymptotes horizontales ou verticales
- Les graphiques des fonctions polynomiales de degré 0 sont des **droites horizontales**. La forme des autres graphiques dépend du degré de la fonction. Cinq formes typiques sont illustrées pour différents degrés :



Un **monôme** est le type le plus simple de fonction polynomiale et a la forme :

$$f(x) = ax^n$$

- a est un nombre réel
- x est une variable
- n est un nombre naturel

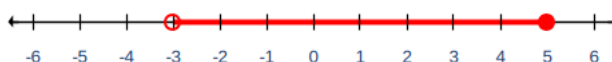
Exemple 1 : Déterminez lesquelles des fonctions suivantes sont des fonctions polynomiales. Indiquez le degré et le coefficient dominant de chaque fonction polynomiale.

a) $g(x) = \sin x$	Pas une fonction polynomiale – fonction trigonométrique, qui n'est pas une somme de puissances entières de x .
b) $f(x) = 2x^4$	Fonction polynomiale. Degré 4, coefficient dominant 2.
c) $y = x^3 - 5x^2 + 6x - 8$	Fonction polynomiale. Degré 3, coefficient dominant 1.
d) $g(x) = 3^x$	Pas une fonction polynomiale – fonction exponentielle, la variable est en exposant.

Notation d'intervalle

Dans ce cours, vous décrirez souvent les caractéristiques des graphiques de divers types de fonctions par rapport à des valeurs réelles. Les ensembles de nombres réels peuvent être décrits de plusieurs façons :

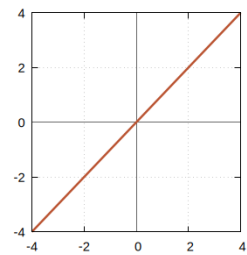
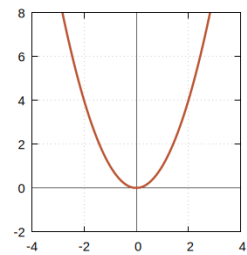
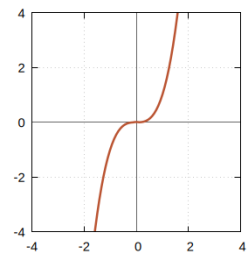
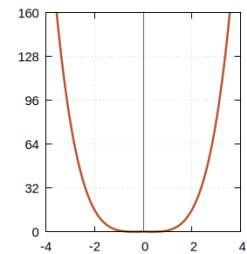
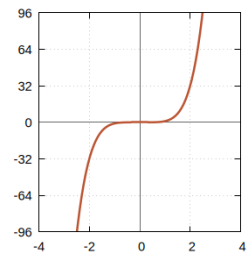
1. sous forme d'inégalité $-3 < x \leq 5$
2. en notation d'intervalle (ou entre crochets) $(-3, 5]$
3. graphiquement sur une droite numérique

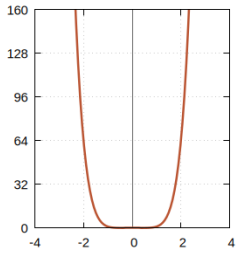


Remarque :

- Les intervalles infinis s'expriment à l'aide de **l'infini** (∞) ou de **l'infini négatif** ($-\infty$)
- **Les crochets** $[]$ indiquent que la valeur limite est incluse dans l'intervalle
- **Les parenthèses** $()$ indiquent que la valeur limite n'est PAS incluse dans l'intervalle
- Une **parenthèse (ouverte)** est toujours utilisée à l'infini et à l'infini négatif

Exemple 2 : Voici les graphiques de fonctions puissance polynomiales courantes. Utilisez le graphique pour compléter le tableau.

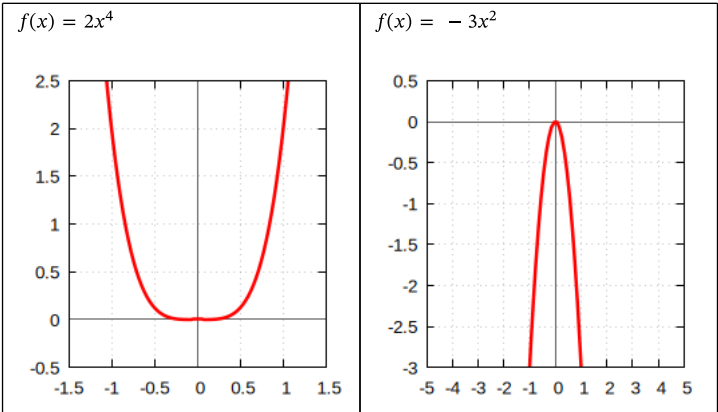
Fonction puissance polynomiale	Nom particulier	Graphique	Domaine	Image	Comportement à l'infini quand $x \rightarrow -\infty$	Comportement à l'infini quand $x \rightarrow \infty$
$y = x$	Linéaire		$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$y \rightarrow -\infty$ (Q3)	$y \rightarrow \infty$ (Q1)
$y = x^2$	Quadratique		$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$	$y \rightarrow \infty$ (Q2)	$y \rightarrow \infty$ (Q1)
$y = x^3$	Cubique		$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$y \rightarrow -\infty$ (Q3)	$y \rightarrow \infty$ (Q1)
$y = x^4$	Quartique		$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$	$y \rightarrow \infty$ (Q2)	$y \rightarrow \infty$ (Q1)
$y = x^5$	Quintique		$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$y \rightarrow -\infty$ (Q3)	$y \rightarrow \infty$ (Q1)

$y = x^6$	Sextique		$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$	$y \rightarrow \infty$ (Q2)	$y \rightarrow \infty$ (Q1)
-----------	----------	---	---------------------	---------------	-----------------------------	-----------------------------

Caractéristiques clés des fonctions puissance polynomiales de degré PAIR

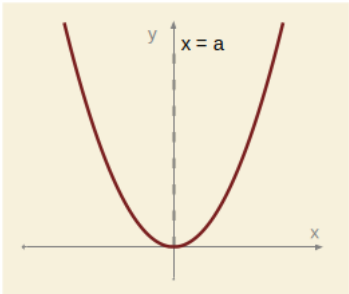
Lorsque le coefficient dominant (a) est positif	Lorsque le coefficient dominant (a) est négatif
Comportement à l’infini : lorsque $x \rightarrow \pm \infty$, $y \rightarrow \infty$ (le graphique va de Q2 à Q1)	Comportement à l’infini : lorsque $x \rightarrow \pm \infty$, $y \rightarrow -\infty$ (le graphique va de Q3 à Q4)
Domaine : $(-\infty, \infty)$	Domaine : $(-\infty, \infty)$
Image : $[0, \infty)$	Image : $(-\infty, 0]$

Exemple :



Symétrie par rapport à une droite

Un graphique possède une symétrie par rapport à une droite s’il existe une droite verticale $x = a$ qui divise le graphique en deux parties telles que chacune est le reflet de l’autre.



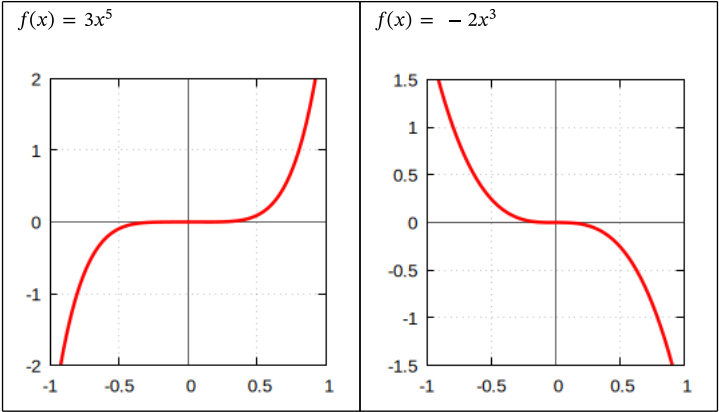
Remarque : les fonctions puissance polynomiales de degré pair (et toute fonction ayant un seul sommet, comme la parabole illustrée) possèdent une symétrie par rapport à la droite verticale passant par leur sommet.

Caractéristiques clés des fonctions puissance polynomiales de degré IM-

PAIR

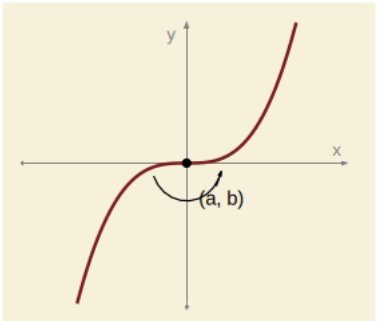
Lorsque le coefficient dominant (a) est positif	Lorsque le coefficient dominant (a) est négatif
Comportement à l’infini : lorsque $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$; lorsque $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ (le graphique va de Q3 à Q1)	Comportement à l’infini : lorsque $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow \infty$; lorsque $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow -\infty$ (le graphique va de Q2 à Q4)
Domaine : $(-\infty, \infty)$	Domaine : $(-\infty, \infty)$
Image : $(-\infty, \infty)$	Image : $(-\infty, \infty)$

Exemple :



Symétrie par rapport à un point

Un graphique possède une symétrie par rapport à un point (a, b) si chaque partie du graphique d’un côté de (a, b) peut être tournée de 180° pour coïncider avec la partie du graphique de l’autre côté de (a, b) .



Remarque : les fonctions puissance polynomiales de degré impair possèdent une symétrie par rapport à l’origine $(0, 0)$.

Exemple 3 : Inscrivez chaque fonction dans la rangée appropriée de la deuxième colonne du tableau. Justifiez vos choix.

- $y = 2x$, $y = 5x^6$, $y = -3x^2$, $y = x^7$
- $y = -\frac{2}{5}x^9$, $y = -4x^5$, $y = x^{10}$, $y = -0.5x^8$

Comportement à l’infini	Fonctions	Justifications
De Q3 à Q1	$y = 2x$, $y = x^7$	Degré impair avec un coefficient dominant positif : lorsque $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$; lorsque $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$.
De Q2 à Q4	$y = -\frac{2}{5}x^9$, $y = -4x^5$	Degré impair avec un coefficient dominant négatif : lorsque $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow \infty$; lorsque $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow -\infty$.

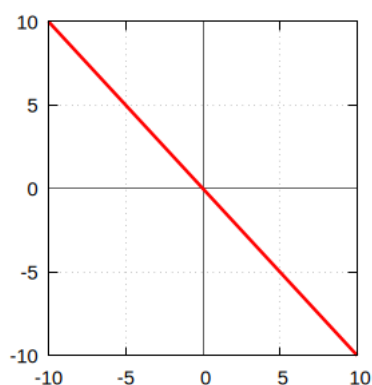
De Q2 à Q1	$y = 5x^6, y = x^{10}$	Degré pair avec un coefficient dominant positif : lorsque $x \rightarrow \pm \infty, y \rightarrow \infty$.
De Q3 à Q4	$y = -3x^2, y = -0.5x^8$	Degré pair avec un coefficient dominant négatif : lorsque $x \rightarrow \pm \infty, y \rightarrow -\infty$.

Exemple 4

Pour chacune des fonctions suivantes

i) Indiquez le domaine et l'image ii) Décrivez le comportement à l'infini iii) Déterminez toute symétrie

a) $y = -x$

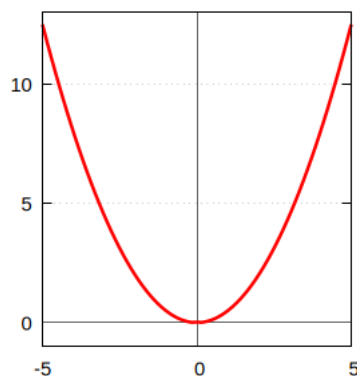


i) Domaine : $(-\infty, \infty)$ Image : $(-\infty, \infty)$

ii) Lorsque $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow \infty$ et lorsque $x \rightarrow \infty, y \rightarrow -\infty$ Le graphique va de Q2 à Q4

iii) Symétrie par rapport à l'origine $(0, 0)$ (fonction impaire)

b) $y = 0.5x^2$

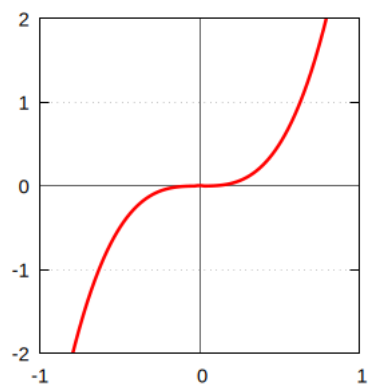


i) Domaine : $(-\infty, \infty)$ Image : $[0, \infty)$

ii) Lorsque $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow \infty$ et lorsque $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ Le graphique va de Q2 à Q1

iii) Symétrie par rapport à l'axe des y ($x = 0$)

c) $y = 4x^3$



- i) Domaine : $(-\infty, \infty)$ Image : $(-\infty, \infty)$
- ii) Lorsque $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$ et lorsque $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ Le graphique va de Q3 à Q1
- iii) Symétrie par rapport à l'origine (0, 0) (fonction impaire)