

Leçon de révision de l'examen de fonctions avancées de douzième année avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

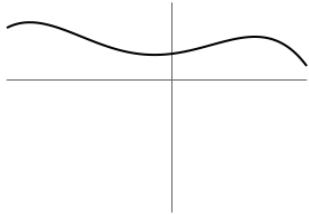
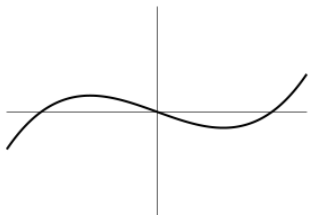
Unité 1 : Fonctions polynomiales

1) Associe chaque fonction à son comportement à l'infini

$$y = -3x^2 \quad y = 5x^4 \quad y = 0.5x^3 \quad y = -\frac{1}{3}x^5$$

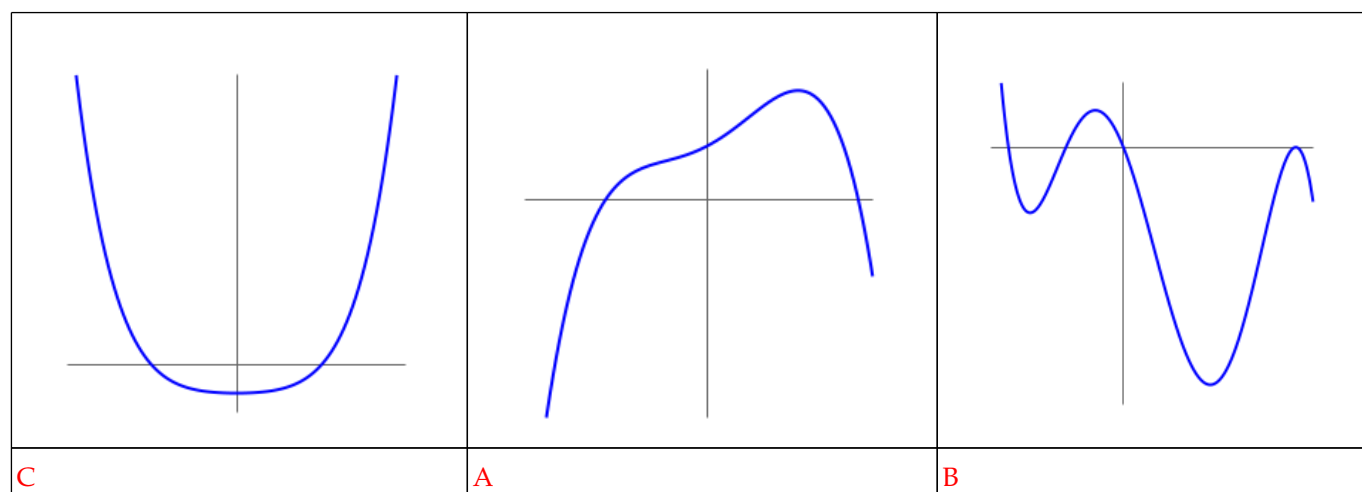
Comportement à l'infini	Fonction
Q3 à Q1	$y = 0.5x^3$
Q2 à Q4	$y = -\frac{1}{3}x^5$
Q2 à Q1	$y = 5x^4$
Q3 à Q4	$y = -3x^2$

2) Complète le tableau suivant

Graphique de la fonction	Degré pair ou impair?	Signe du coefficient dominant	Domaine et image	Symétrie	Comportement à l'infini
	PAIR	-	$D : \{x \in \mathbb{R}\}$ $Im : \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 3\}$	AUCUNE	Q3 → Q4
	IMPAIR	+	$D : \{x \in \mathbb{R}\}$ $Im : \{y \in \mathbb{R}\}$	Point l'origine	à Q3 → Q1

3) Utilise les comportements à l'infini, les points tournants et les zéros pour associer chaque équation au graphique le plus probable. Écris la lettre de l'équation sous le graphique.

A) $g(x) = -2x^4 + 3x^2 + 4x + 5$ **B)** $h(x) = -x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 15x^2 - 18x$ **C)** $p(x) = x^6 + 5x^4 + 2x^2 - 3$



4) Utilise le polynôme, $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8$ pour répondre aux questions suivantes

a) Complète le tableau

Degré	Coefficient dominant	Comportement à l'infini	Nombre possible de points tournants	Nombre possible de zéros
3	2	Q3 → Q1	2, 0	3, 2, 1

b) Est-ce une fonction paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre? Explique.

Ni l'une ni l'autre; mélange de termes de degré pair et impair.

c) Y a-t-il un type de symétrie présent? Explique.

Symétrie par rapport à un point; toutes les fonctions cubiques ont une symétrie de point.

5) Utilise le polynôme, $P(x) = -6x^4 + 2x^2 - 1$ pour répondre aux questions suivantes

a) Complète le tableau

Degré	Coefficient dominant	Comportement à l'infini	Nombre possible de points tournants	Nombre possible de zéros
4	-6	Q3 → Q4	3, 1	4, 3, 2, 1, 0

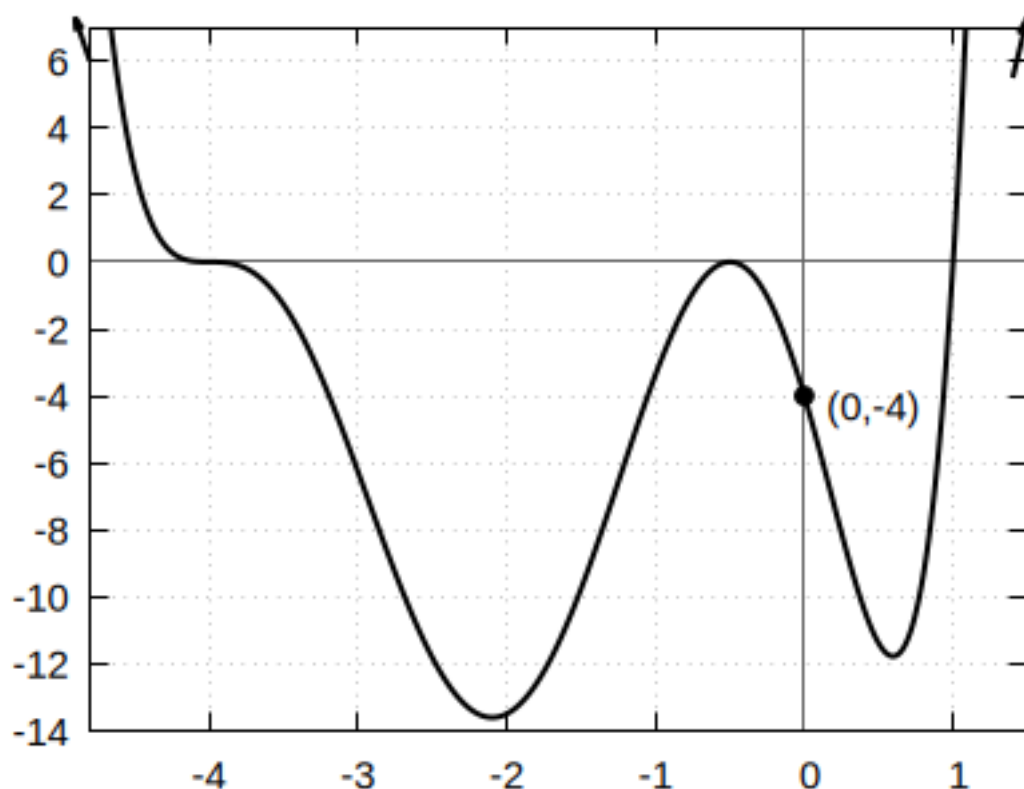
b) Est-ce une fonction paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre? Explique.

Paire; tous les termes sont de degré pair.

c) Y a-t-il un type de symétrie présent? Explique.

Symétrie par rapport à l'axe des y; toutes les fonctions paires ont cette symétrie.

Étant donné le graphique ci-dessous :



a) Complète le tableau suivant

Signe du coefficient dominant	Degré pair ou impair?	Comportement à l'infini	Nombre de points tournants	Abscisses à l'origine avec leur ordre	Degré minimal possible
+	PAIR	Q2 → Q1	3	(-4, 0) ordre 3 (-0.5, 0) ordre 2 (1, 0) ordre 1	6

b) Trouve l'équation sous forme factorisée

$$f(x) = k(x + 4)^3(2x + 1)^2(x - 1)$$

$$-4 = k(0 + 4)^3[2(0) + 1]^2(0 - 1)$$

$$-4 = k(64)(1)(-1)$$

$$-4 = -64k$$

$$k = \frac{1}{16}$$

$$f(x) = \frac{1}{16}(x + 4)^3(2x + 1)^2(x - 1)$$

6) Trouve l'équation d'une fonction quartique qui a des zéros en -4, 1, et 3 (ordre 2) et qui passe par le point (2, 6)

$$f(x) = k(x + 4)(x - 1)(x - 3)^2$$

$$6 = k(2 + 4)(2 - 1)(2 - 3)^2$$

$$6 = k(6)(1)(1)$$

$$6 = 6k$$

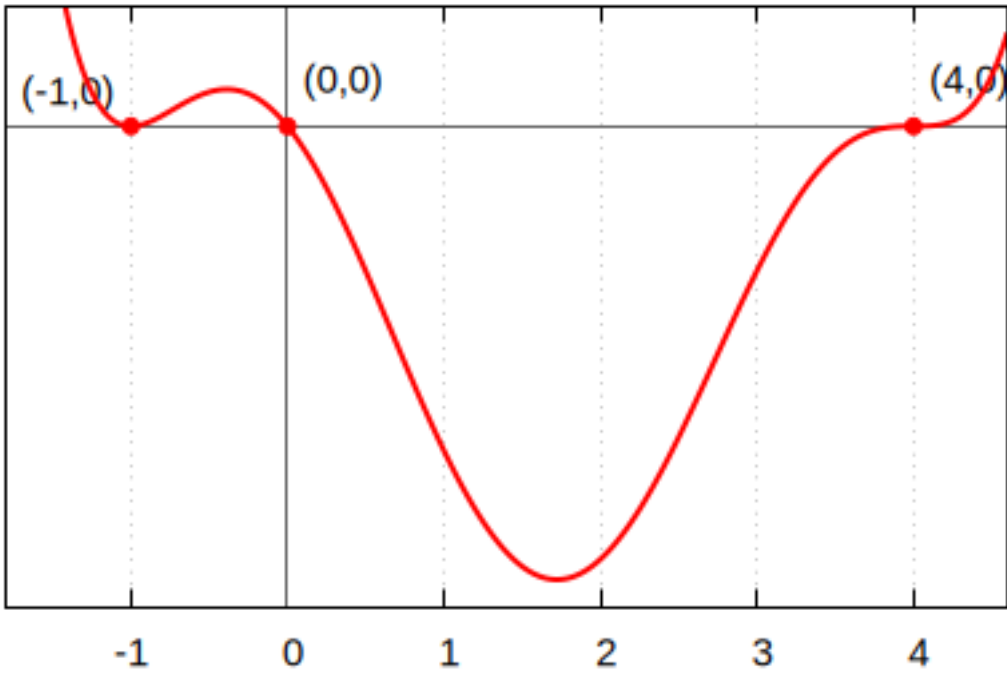
$$k = 1$$

$$f(x) = (x + 4)(x - 1)(x - 3)^2$$

7) Complète le tableau et esquisse un graphique possible de la fonction en identifiant les points clés.

$f(x) = \frac{1}{2}x(x - 4)^3(x + 1)^2$

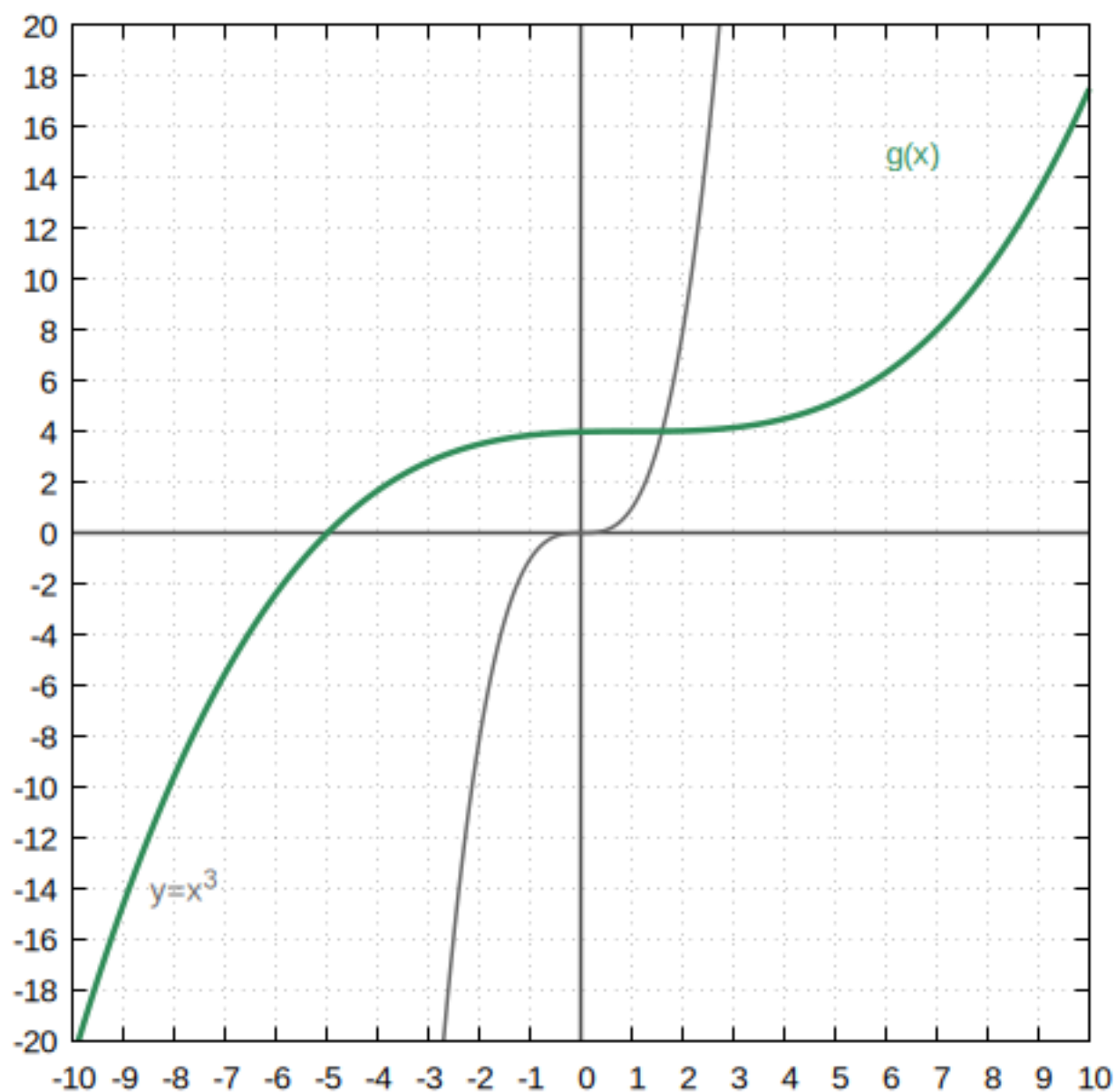
Degré	Coefficient dominant	Comportement à l'infini	Abscisses à l'origine et leurs ordres	Ordonnée à l'origine
$(x)(x^3)(x^2) = x^6$ Degré 6	$\frac{1}{2}(1)^3(1)^2 = \frac{1}{2}$	Q2 → Q1	(0, 0) ordre 1 (4, 0) ordre 3 (-1, 0) ordre 2	$f(0) = \frac{1}{2}(0)(0 - 4)^3(0 + 1)^2 = 0$ (0, 0)



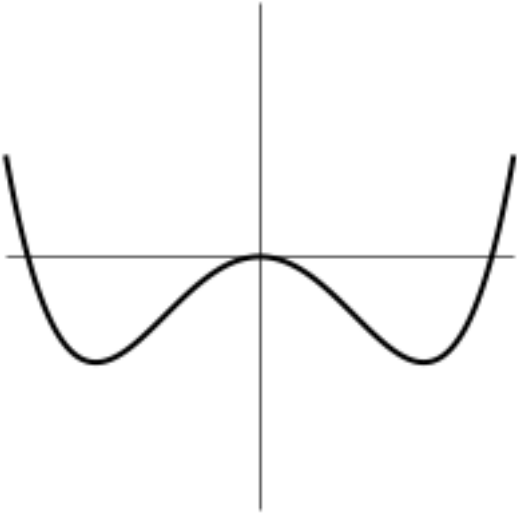
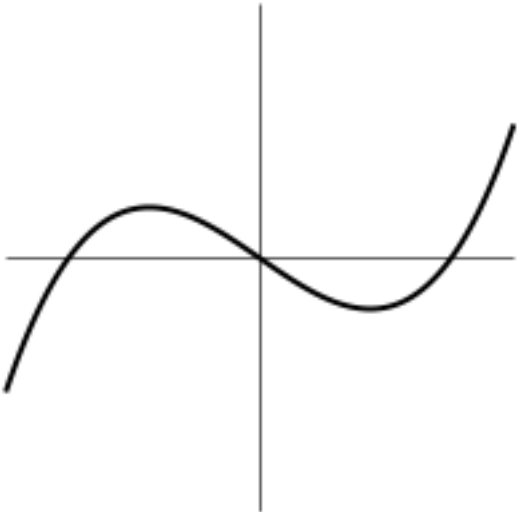
8) Quelle est la fonction mère de, $g(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x - 1)\right]^3 + 4$?

$y = x^3$

b) Utilise des transformations pour tracer à la fois la fonction mère et la fonction transformée ci-dessous. Identifie clairement chaque fonction. Montre tes calculs et tableaux de valeurs.



9) Encerle toutes les réponses qui s'appliquent pour chaque fonction

	Aucune symétrie Fonction paire Fonction impaire Symétrie par rapport à une droite Symétrie par rapport à un point
	Aucune symétrie Fonction paire Fonction impaire Symétrie par rapport à une droite Symétrie par rapport à un point
$f(x) = 3x^4 + 2x + 1$	Aucune symétrie Fonction paire Fonction impaire Symétrie par rapport à une droite Symétrie par rapport à un point
$f(x) = 2x^4 + 4x^2 - 5$	Aucune symétrie Fonction paire Fonction impaire Symétrie par rapport à une droite Symétrie par rapport à un point

Unité 2 : Théorème du facteur

10) Divise $3x^3 - x^2 - 1$ par $x + 2$. Montre en utilisant la division longue et la division synthétique. Exprime le résultat sous forme de quotient.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 \quad -7x + 14 \\
 x + 2 \overline{) 3x^3 - x^2 + 0x - 1} \\
 \underline{3x^3 + 6x^2} \\
 -7x^2 + 0x \\
 \underline{-7x^2 - 14x} \\
 14x - 1 \\
 \underline{14x + 28} \\
 R = -29
 \end{array}$$

$$(3x^3 - x^2 + 0x - 1) \div (x + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -2 & 3 & -1 & 0 & -1 \\
 & & -6 & 14 & -28 \\
 \hline
 & 3 & -7 & 14 & -29 \\
 & x^2 & x & \# & R
 \end{array}$$

$$\frac{3x^3 - x^2 - 1}{x + 2} = 3x^2 - 7x + 14 - \frac{29}{x + 2}$$

11)a) Quel serait le reste si tu divisais $p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 7$ par $x + 3$? Utilise le théorème du reste, ne divise pas!

$$p(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 + 4(-3) + 7$$

$$p(-3) = -5$$

Le reste est -5 .

b) Utilise la division synthétique pour vérifier ta réponse. Exprime ta réponse à l'aide de l'énoncé de multiplication qui peut être utilisé pour vérifier la division.

$$(x^3 + 3x^2 + 4x + 7) \div (x + 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -3 & 1 & 3 & 4 & 7 \\
 & & -3 & 0 & -12 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 4 & -5 \\
 & x^2 & x & \# & R
 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 7 = (x + 3)(x^2 + 4) - 5$$

12) Effectue chaque division en utilisant la méthode la plus appropriée. Exprime ta réponse à l'aide de l'énoncé de multiplication qui peut être utilisé pour vérifier la division.

a) $(4x^3 + 6x^2 - 4x + 2) \div (2x - 1)$ b) $(2x^3 - 4x + 8) \div (x - 2)$

$ \begin{array}{r} 2x^2 + 4x + 0 \\ 2x - 1 \overline{) 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2} \\ \underline{4x^3 - 2x^2} \\ 8x^2 - 4x \\ \underline{8x^2 - 4x} \\ 0x + 2 \\ \underline{0x + 0} \\ R = 2 \end{array} $ $4x^3 + 6x^2 - 4x + 2 = (2x - 1)(2x^2 + 4x) + 2$	$(2x^3 + 0x^2 - 4x + 8) \div (x - 2)$ $ \begin{array}{r rrrr} 2 & 2 & 0 & -4 & 8 \\ & & 4 & 8 & 8 \\ \hline & 2 & 4 & 4 & 16 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array} $ $2x^3 - 4x + 8 = (x - 2)(2x^2 + 4x + 4) + 16$
--	--

13) Détermine la valeur de k telle que lorsque $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + kx^2 - 1$ est divisé par $x + 2$, le reste est -5 .

$$f(-2) = 3(-2)^5 - 4(-2)^3 + k(-2)^2 - 1$$

$$-5 = -96 + 32 + 4k - 1$$

$$-5 = 4k - 65$$

$$60 = 4k$$

$$k = 15$$

14) Factorise le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$. Je veux voir une liste COMPLÈTE des zéros possibles, ton essai du zéro, et ta division polynomiale.

Zéros possibles : $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$$\text{Essai(s)} : f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 10(1) + 8$$

$$f(1) = 0 \therefore x - 1 \text{ est un facteur}$$

$$(x^3 + x^2 - 10x + 8) \div (x - 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & 1 & -10 & 8 \\
 & & 1 & 2 & -8 \\
 \hline
 & 1 & 2 & -8 & 0 \\
 & x^2 & x & \# & R
 \end{array}$$

$$P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1)(x^2 + 2x - 8)$$

$$\text{Forme factorisée : } P(x) = (x - 1)(x + 4)(x - 2)$$

15) Factorise le polynôme $P(x) = 3x^4 + x^3 - 14x^2 - 4x + 8$. Je veux voir une liste COMPLÈTE des zéros possibles, ton essai du zéro, et ta division polynomiale.

$$\text{Zéros possibles : } x = \pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 4, \pm \frac{4}{3}, \pm 8, \pm \frac{8}{3}$$

$$\text{Essai(s)} : f(-1) = 3(-1)^4 + (-1)^3 - 14(-1)^2 - 4(-1) + 8$$

$$f(-1) = 0 \therefore x + 1 \text{ est un facteur}$$

$$(3x^4 + x^3 - 14x^2 - 4x + 8) \div (x + 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -1 & 3 & 1 & -14 & -4 & 8 \\
 & & -3 & 2 & 12 & -8 \\
 \hline
 & 3 & -2 & -12 & 8 & 0 \\
 & x^3 & x^2 & x & \# & R
 \end{array}$$

$$P(x) = (x + 1)(3x^3 - 2x^2 - 12x + 8)$$

$$P(x) = (x + 1)[x^2(3x - 2) - 4(3x - 2)]$$

$$P(x) = (x + 1)(3x - 2)(x^2 - 4)$$

$$\text{Forme factorisée : } P(x) = (x + 1)(3x - 2)(x - 2)(x + 2)$$

16) Crée une équation représentant une famille de polynômes cubiques ayant des zéros en -3 et en $1 \pm \sqrt{6}$. Tu peux laisser ta réponse sous forme factorisée (tu n'as pas besoin de développer sous forme standard).

Facteurs : $x + 3 = 0$ et $x - 1 = \pm \sqrt{6}$

$$(x - 1)^2 = 6$$

$$x^2 - 2x + 1 = 6$$

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

Équation pour la famille : $y = k(x + 3)(x^2 - 2x - 5)$

17) Résous les équations OU inéquations suivantes en factorisant complètement d'abord. Utilise n'importe quelle technique de factorisation. Pour les inéquations, montre une esquisse du polynôme ou un tableau de facteurs pour appuyer ta solution.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

a) $y = 27x^3 - 64$

$$0 = (3x - 4)[(3x)^2 + 12x + (4)^2]$$

$$0 = (3x - 4)(9x^2 + 12x + 16)$$

$$3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Pour $9x^2 + 12x + 16$: $b^2 - 4ac = 12^2 - 4(9)(16) = -432 \therefore$ aucune solution

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 16x - 32$

$$0 = x^2(x - 2) + 16(x - 2)$$

$$0 = (x - 2)(x^2 + 16)$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x^2 = -16 \Rightarrow \text{aucune solution}$$

c) $g(x) = x^4 - 29x^2 + 100$

$$g(2) = 0 \therefore x - 2 \text{ est un facteur}$$

$$(x^4 + 0x^3 - 29x^2 + 0x + 100) \div (x - 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & 0 & -29 & 0 & 100 & \\ & & 2 & 4 & -50 & -100 & \\ \hline & 1 & 2 & -25 & -50 & 0 & \\ & x^3 & x^2 & x & \# & R & \end{array}$$

$$0 = (x - 2)(x^3 + 2x^2 - 25x - 50)$$

$$0 = (x - 2)[x^2(x + 2) - 25(x + 2)]$$

$$0 = (x - 2)(x + 2)(x^2 - 25)$$

$$0 = (x - 2)(x + 2)(x - 5)(x + 5)$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = -5$$

d) $h(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

$$h(-1) = 0 \therefore x + 1 \text{ est un facteur}$$

$$(x^3 - x^2 - 10x - 8) \div (x + 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -10 & -8 & \\ & & -1 & 2 & 8 & \\ \hline & 1 & -2 & -8 & 0 & \\ & x^2 & x & \# & R & \end{array}$$

$$0 = (x + 1)(x^2 - 2x - 8)$$

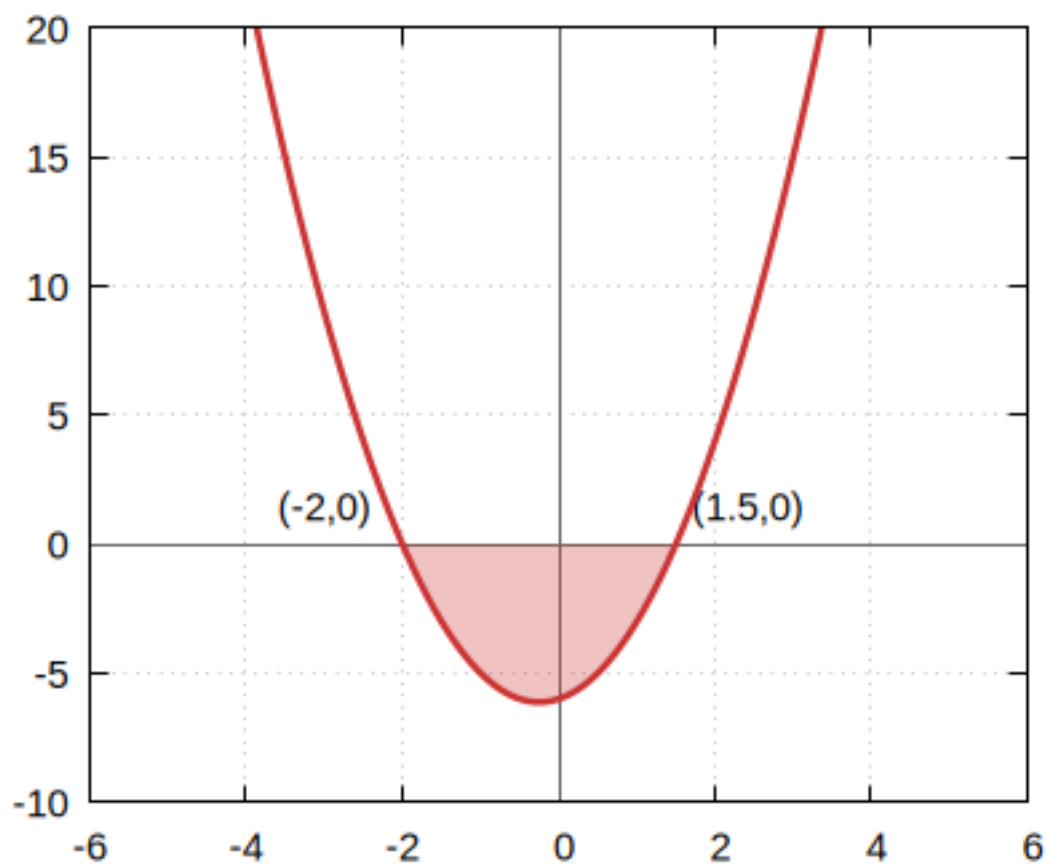
$$0 = (x + 1)(x - 4)(x + 2)$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -2$$

e) $2x^2 + x - 6 < 0$

$$(x + 2)(2x - 3) < 0$$

Abscisses à l'origine en $x = -2, 1.5$; coefficient dominant positif, degré pair (Q2 → Q1)



Solution : lorsque $-2 < x < 1.5$, ou $x \in (-2, 1.5)$

f) $x^3 - 2x^2 - 13x \leq 10$

$$x^3 - 2x^2 - 13x - 10 \leq 0$$

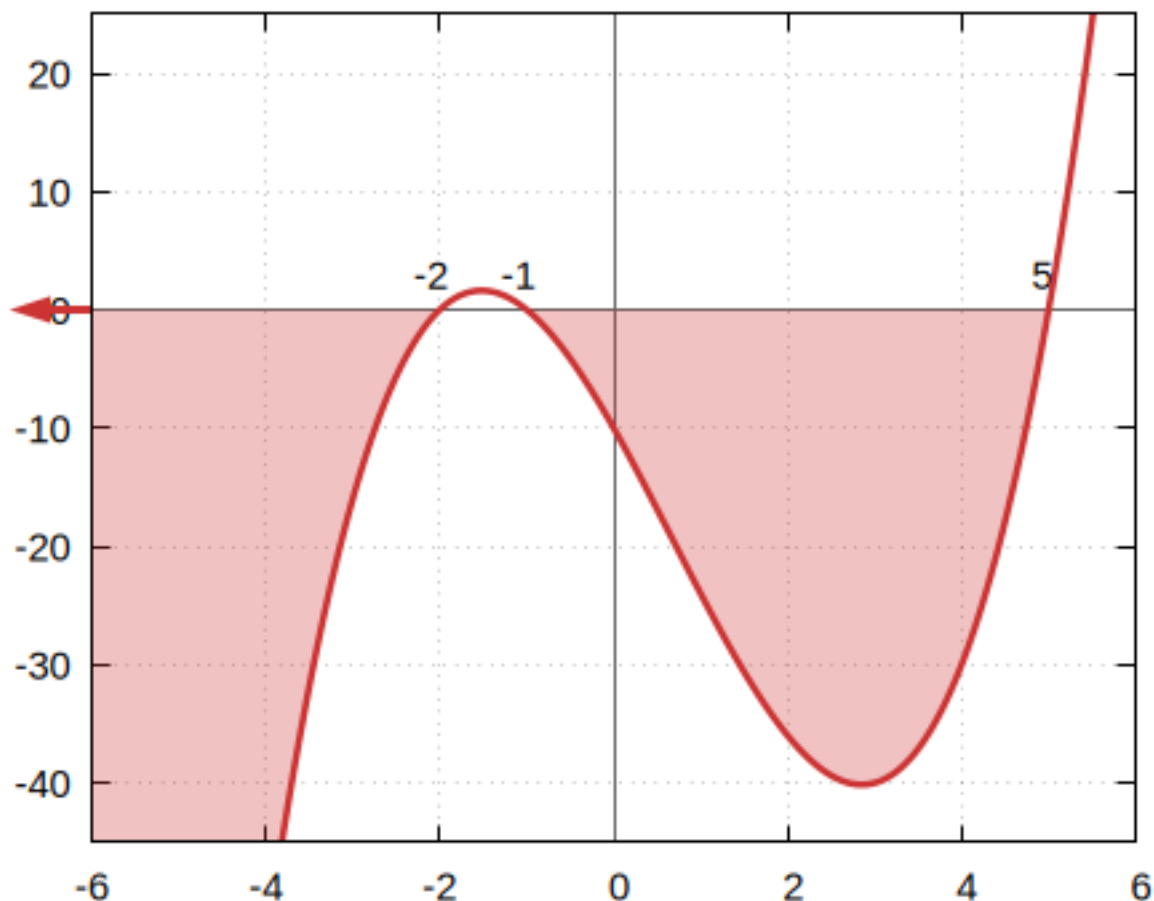
$$(x^3 - 2x^2 - 13x - 10) \div (x + 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -13 & -10 \\ & & -1 & 3 & 10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \\ x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$$(x + 1)(x^2 - 3x - 10) \leq 0$$

$$(x + 1)(x - 5)(x + 2) \leq 0$$

Abscisses à l'origine en $x = -2, -1, 5$; coefficient dominant positif, degré impair (Q3 → Q1)



Solution : lorsque $x \leq -2$ ou $-1 \leq x \leq 5$, ou $x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 5]$

Unité 3 : Fonctions exponentielles et logarithmiques

18) Réécris chaque équation sous forme logarithmique.

a) $5^4 = 625$	b) $4^x = 12$	c) $y = 12^3$
$\log_5(625) = 4$	$\log_4(12) = x$	$\log_{12}(y) = 3$

19) Réécris chaque équation sous forme exponentielle.

a) $x = \log 8$	b) $4 = \log_5 x$	c) $7 = \log_b 200$
$10^x = 8$	$5^4 = x$	$b^7 = 200$

20) Évalue sans utiliser de calculatrice.

a) $\log_2 256$	b) $\log_4 64$	c) $\log_2 0.25$
$= \log_2(2)^8 = 8$	$= \log_4(4)^3 = 3$	$= \log_2(2)^{-2} = -2$
d) $2^{\log 1000}$	e) $\log\left(\frac{1}{1000}\right)$	f) $\log_6 6$
$= 2^3 = 8$	$= \log(10)^{-3} = -3$	$= 1$

21) Résous chaque équation exponentielle. Utilise et montre des méthodes appropriées. Arrondis à 3 décimales si nécessaire. Assure-toi de vérifier les racines étrangères si nécessaire.

21) Résous chaque équation exponentielle. Utilise et montre des méthodes appropriées. Arrondis à 3 décimales si nécessaire. Assure-toi de vérifier les racines étrangères si nécessaire.

a) $3^x = 12$

$$\log_3(12) = x$$

$$x = \frac{\log(12)}{\log(3)}$$

$$x \approx 2.26$$

b) $4^{2x+5} = 32^{4-x}$

$$(2^2)^{2x+5} = (2^5)^{4-x}$$

$$2^{4x+10} = 2^{20-5x}$$

$$4x + 10 = 20 - 5x$$

$$9x = 10$$

$$x = \frac{10}{9}$$

c) $27^{2-3x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2x}$

$$(3^3)^{2-3x} = (3^{-2})^{2x}$$

$$3^{6-9x} = 3^{-4x}$$

$$6 - 9x = -4x$$

$$6 = 5x$$

$$x = \frac{6}{5}$$

d) $4^{2x-5} = 7^x$

$$\log(4)^{2x-5} = \log(7)^x$$

$$(2x - 5)\log(4) = x\log(7)$$

$$2x\log(4) - 5\log(4) = x\log(7)$$

$$2x\log(4) - x\log(7) = 5\log(4)$$

$$x[2\log(4) - \log(7)] = 5\log(4)$$

$$x = \frac{5\log(4)}{2\log(4) - \log(7)}$$

$$x \approx 8.385$$

e) $5^{x+4} = 2^{4-5x}$

$$\log(5)^{x+4} = \log(2)^{4-5x}$$

$$(x + 4)\log(5) = (4 - 5x)\log(2)$$

$$x\log(5) + 4\log(5) = 4\log(2) - 5x\log(2)$$

$$x\log(5) + 5x\log(2) = 4\log(2) - 4\log(5)$$

$$x[\log(5) + 5\log(2)] = \log(16) - \log(625)$$

$$x = \frac{\log(16) - \log(625)}{\log(5) + 5\log(2)}$$

$$x \approx -0.722$$

f) $3^{2x} - 4(3)^x + 3 = 0$

Soit $k = 3^x : k^2 - 4k + 3 = 0$

$$(k - 3)(k - 1) = 0 \Rightarrow k = 3 \text{ ou } k = 1$$

Cas 1 : $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

Cas 2 : $3^x = 1 \Rightarrow x = \frac{\log(1)}{\log(3)} = 0$

22) Écris comme un seul logarithme, puis évalue. Arrondis à 2 décimales si nécessaire.

a) $\log_4 12 - \log_4 3$	b) $3\log 6 + 2\log 5 - \log 54$
$= \log_4 \left(\frac{12}{3} \right)$ $= \log_4 (4)$ $= 1$	$= \log(6)^3 + \log(5)^2 - \log(54)$ $= \log(216) + \log(25) - \log(54)$ $= \log \left(\frac{216 \times 25}{54} \right)$ $= \log(100) = 2$

23) Simplifie.

a) $\log(x^2 - 4x - 12) - \log(3x - 18)$	b) $\log(x^3 - 27) - \log(x - 3)$
$= \log \left(\frac{x^2 - 4x - 12}{3x - 18} \right)$ $= \log \left[\frac{(x - 6)(x + 2)}{3(x - 6)} \right]$ $= \log \left(\frac{x + 2}{3} \right)$	$= \log \left(\frac{x^3 - 27}{x - 3} \right)$ $= \log \left[\frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} \right]$ $= \log(x^2 + 3x + 9)$

24) Résous les équations logarithmiques suivantes. Utilise et montre des méthodes appropriées. Arrondis à 3 décimales si nécessaire. Assure-toi de vérifier les racines étrangères si nécessaire.

a) $\log_3(3x + 7) = 2$

$$3^2 = 3x + 7$$

$$9 = 3x + 7$$

$$2 = 3x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

b) $\log_5(2x + 1) = 1 - \log_5(x + 2)$

$$\log_5(2x + 1) + \log_5(x + 2) = 1$$

$$\log_5[(2x + 1)(x + 2)] = 1$$

$$5^1 = 2x^2 + 5x + 2$$

$$0 = 2x^2 + 5x - 3$$

$$0 = 2x^2 - x + 6x - 3$$

$$0 = x(2x - 1) + 3(2x - 1)$$

$$0 = (2x - 1)(x + 3)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -3 \text{ (racine étrangère)}$$

c) $\log_4 x = \log_4 15 - \log_4 3$

$$\log_4(x) = \log_4 \left(\frac{15}{3} \right)$$

$$\log_4(x) = \log_4(5)$$

$$x = 5$$

d) $\log_4(x^2 - 9x + 18) - \log_4(x - 3) = 2$

$$\log_4 \left(\frac{x^2 - 9x + 18}{x - 3} \right) = 2$$

$$\log_4 \left[\frac{(x - 3)(x - 6)}{x - 3} \right] = 2$$

$$\log_4(x - 6) = 2$$

$$4^2 = x - 6$$

$$16 = x - 6 \Rightarrow x = 22$$

Formules exponentielles et logarithmiques

$A(t) = A_0(1 + i)^t$	$A(t) = A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/H}$	$A(t) = A_0(2)^{t/D}$
où i est le pourcentage de croissance (+) ou de décroissance (-)	où H est la période de demi-vie	où D est la période de doublement
$pH = -\log[H^+]$	$\beta_2 - \beta_1 = 10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$	$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$
où pH est l'acidité et $[H^+]$ est la concentration d'ions hydronium en mol/L	où β est le niveau sonore en dB et I est l'intensité du son en W/m^2	où M est la magnitude mesurée sur l'échelle de Richter et I est l'intensité

25) Si le pH d'une solution est 4.2, quelle est la concentration des ions hydronium?

$$4.2 = -\log[H^+]$$

$$-4.2 = \log[H^+]$$

$$10^{-4.2} = [H^+]$$

$$[H^+] \approx 0.0000630957, \text{ OU } 6.31 \times 10^{-5} \text{ mol/L}$$

26) Un placement rapporte des intérêts composés annuellement pendant 12 ans. Durant cette période, sa valeur passe de 2500 \$ à 7100 \$. Quel était le taux d'intérêt, au dixième de pourcent près?

$$7100 = 2500(1 + i)^{12}$$

$$2.84 = (1 + i)^{12}$$

$$(2.84)^{1/12} = 1 + i$$

$$(2.84)^{1/12} - 1 = i$$

$$i \approx 0.091; \text{ le taux d'intérêt était d'environ } 9.1\%$$

27) Un échantillon de 30 mg d'un isotope radioactif se désintègre à 27 mg en 12.5 h.

a) Calcule sa demi-vie, à deux décimales près.

$$27 = 30\left(\frac{1}{2}\right)^{12.5/H}$$

$$0.9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{12.5/H}$$

$$\log_{0.5}(0.9) = \frac{12.5}{H}$$

$$H = \frac{12.5}{\log_{0.5}(0.9)}$$

$$H \approx 82.24 \text{ heures}$$

b) Combien de temps faudra-t-il (à l'heure près) avant qu'il ne reste que 5 mg de l'échantillon?

$$5 = 30\left(\frac{1}{2}\right)^{t/82.24}$$

$$\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/82.24}$$

$$\log_{0.5}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{t}{82.24}$$

$$t = 82.24 \log_{0.5}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$t \approx 212.59 \text{ heures}$$

28) La population d'une espèce animale dans une réserve naturelle croît de 12.2 % chaque année. Au départ, il y a 200 individus de cette espèce.

a) Écris une équation pour la population de l'espèce en fonction du temps, en années.

$$P(t) = 200(1.122)^t$$

b) Quelle sera la population après 20 ans?

$$P(20) = 200(1.122)^{20}$$

$$P(20) \approx 1999$$

c) Combien de temps faut-il pour que la population double?

$$400 = 200(1.122)^t$$

$$2 = 1.122^t$$

$$\log 2 = t \log 1.122$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1.122}$$

$$t \approx 6.02 \text{ années}$$

29)a) L'intensité d'un son au seuil d'audition (0 dB) est de 10^{-12} W/m^2 . Quelle est l'intensité d'un son de 50 dB?

$$50 - 0 = 10 \log \left(\frac{I_2}{10^{-12}} \right)$$

$$5 = \log \left(\frac{I_2}{10^{-12}} \right)$$

$$10^5 = \frac{I_2}{10^{-12}}$$

$$I_2 = (10^5)(10^{-12}) = 10^{-7} \text{ W/m}^2$$

b) Combien de fois plus intense est un son de 85 dB qu'un son de 50 dB?

$$85 - 50 = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

$$3.5 = \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

$$10^{3.5} = \frac{I_2}{I_1}$$

$$\frac{I_2}{I_1} \approx 3162.28; \text{ environ } 3162 \text{ fois plus intense}$$

c) Un bruit est 400 fois plus intense qu'un son de 60 dB. Quelle est la cote décibel de ce bruit?

$$\beta_2 - 60 = 10 \log(400)$$

$$\beta_2 = 10 \log(400) + 60$$

$$\beta_2 \approx 86.02 \text{ dB}$$

30)a) Les magnitudes de deux tremblements de terre sont 4.7 et 7.1. Combien de fois plus intense était le tremblement de terre le plus fort que le moins sévère?

$$M = \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

$$7.1 - 4.7 = \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

$$10^{2.4} = \frac{I}{I_0}$$

$$\frac{I}{I_0} \approx 251.2; \text{ environ } 251.2 \text{ fois plus intense}$$

b) Un tremblement de terre est détecté qui est 450 fois plus intense qu'un tremblement de terre de magnitude 5.2. Quelle est la magnitude du nouveau tremblement de terre?

$$M - 5.2 = \log(450)$$

$$M = \log(450) + 5.2$$

$$M \approx 7.85$$

Unité 4 : Trigonométrie en radians

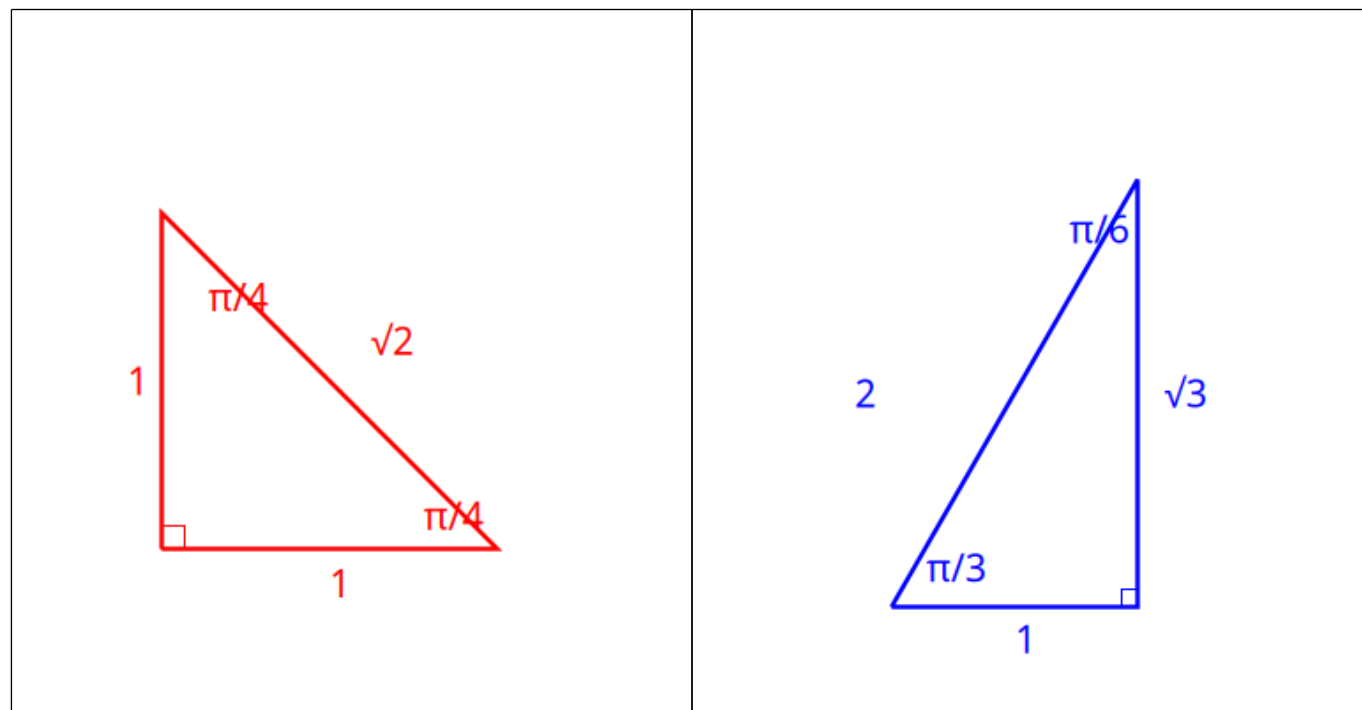
31) Détermine la mesure approximative en degrés, au dixième près, pour chaque angle.

a) 3.62	b) 0.54
$3.62 \times \frac{180}{\pi} \approx 207.4^\circ$	$0.54 \times \frac{180}{\pi} \approx 30.9^\circ$

32) Détermine la mesure exacte en radians de chaque angle.

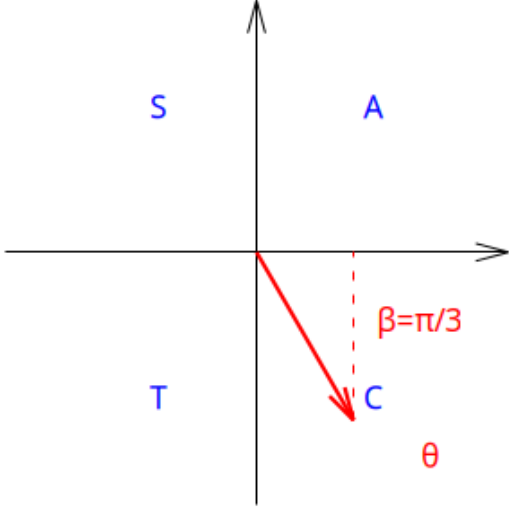
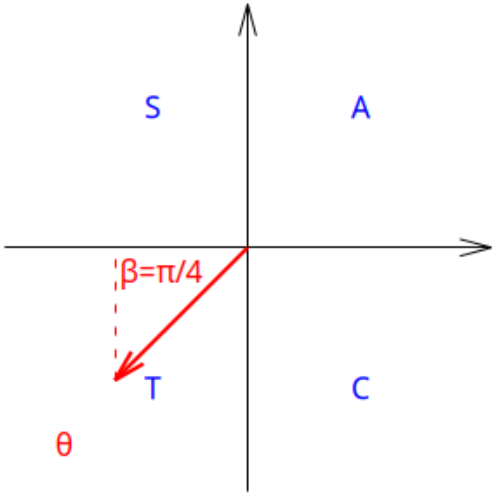
a) 125°	b) 80°	c) 16°
$125^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{25\pi}{36}$ radians	$80^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{9}$ radians	$16^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{45}$ radians

33) Dessine les deux triangles spéciaux en utilisant des mesures en radians.



34) Trouve la valeur exacte des expressions ci-dessous. Utilise les triangles spéciaux et la règle CAST pour trouver ta réponse.

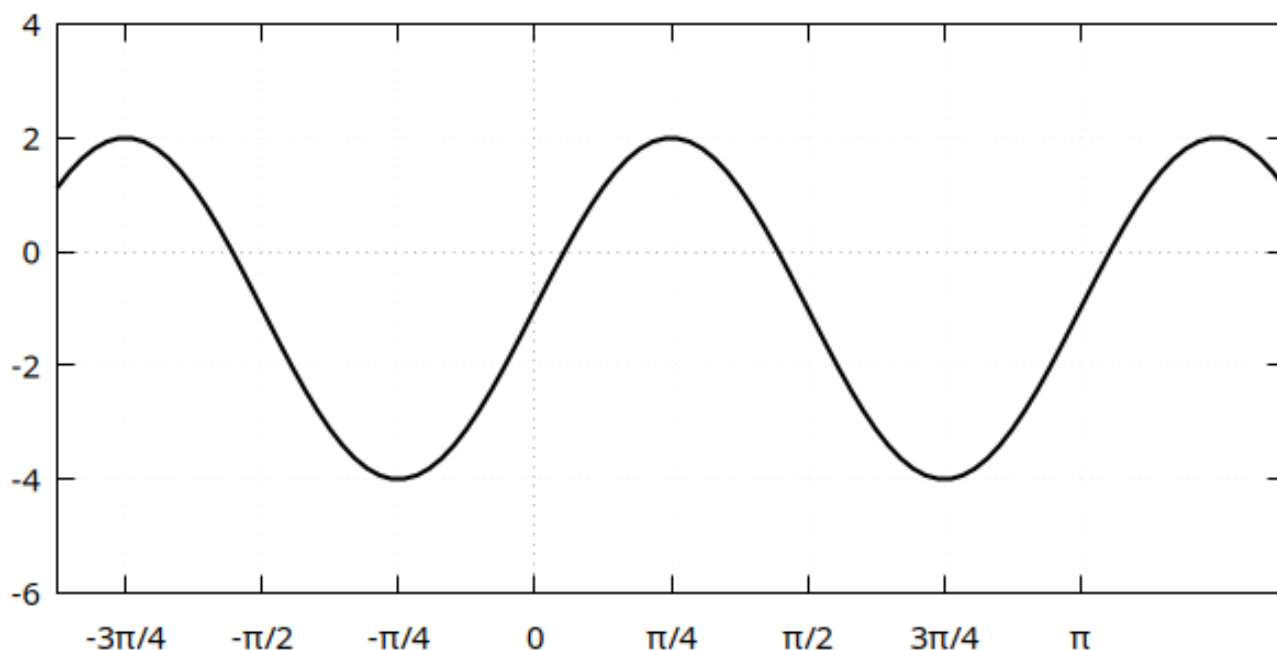
a) $\sin \frac{5\pi}{3}$	b) $\cot \frac{5\pi}{4}$
--------------------------	--------------------------

	
$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$ $= \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{1} = 1$

35) Détermine une valeur exacte pour chaque expression.

a) $\frac{\sin \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{3}}{\csc \frac{\pi}{4}}$	b) $\sec \frac{4\pi}{3} \cot \frac{5\pi}{6} - \tan \frac{3\pi}{4}$
$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt{3})}{\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}}}$ $= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$ $= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$ $= \frac{\sqrt{6}}{4}$	$= \frac{1}{\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)} - \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ $= \frac{1}{-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \times \frac{1}{-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)} - \left(-\tan \frac{\pi}{4}\right)$ $= -2 \times -\sqrt{3} + 1$ $= 2\sqrt{3} + 1$

36) Trouve deux équations (une fonction sinus et une fonction cosinus) pour représenter la fonction du graphique ci-dessous. Montre tes calculs pour obtenir tous les points.



$$a = \frac{\max - \min}{2} = \frac{2 - (-4)}{2} = 3$$

$$k = \frac{2\pi}{\text{période}} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$c = \max - |a| = 2 - 3 = -1$$

$$d_{\cos} = \frac{\pi}{4}$$

$$d_{\sin} = d_{\cos} - \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2(2)} = 0$$

$$y = 3 \cos \left[2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] - 1$$

$$y = 3 \sin(2x) - 1$$

37) Une fonction sinus a une valeur maximale de 6, une valeur minimale de -2, une période de $\frac{\pi}{2}$, et un déphasage de $\frac{\pi}{6}$ radians vers la droite.

a) Écris une équation pour la fonction

$$a = \frac{6 - (-2)}{2} = 4$$

$$k = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$$

$$c = \max - |a| = 6 - 4 = 2$$

$$d_{\sin} = \frac{\pi}{6}$$

$$y = 4 \sin \left[4 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right] + 2$$

b) Écris une équation cosinus équivalente pour la fonction

$$d_{\cos} = d_{\sin} + \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2(4)} = \frac{4\pi}{24} + \frac{3\pi}{24} = \frac{7\pi}{24}$$

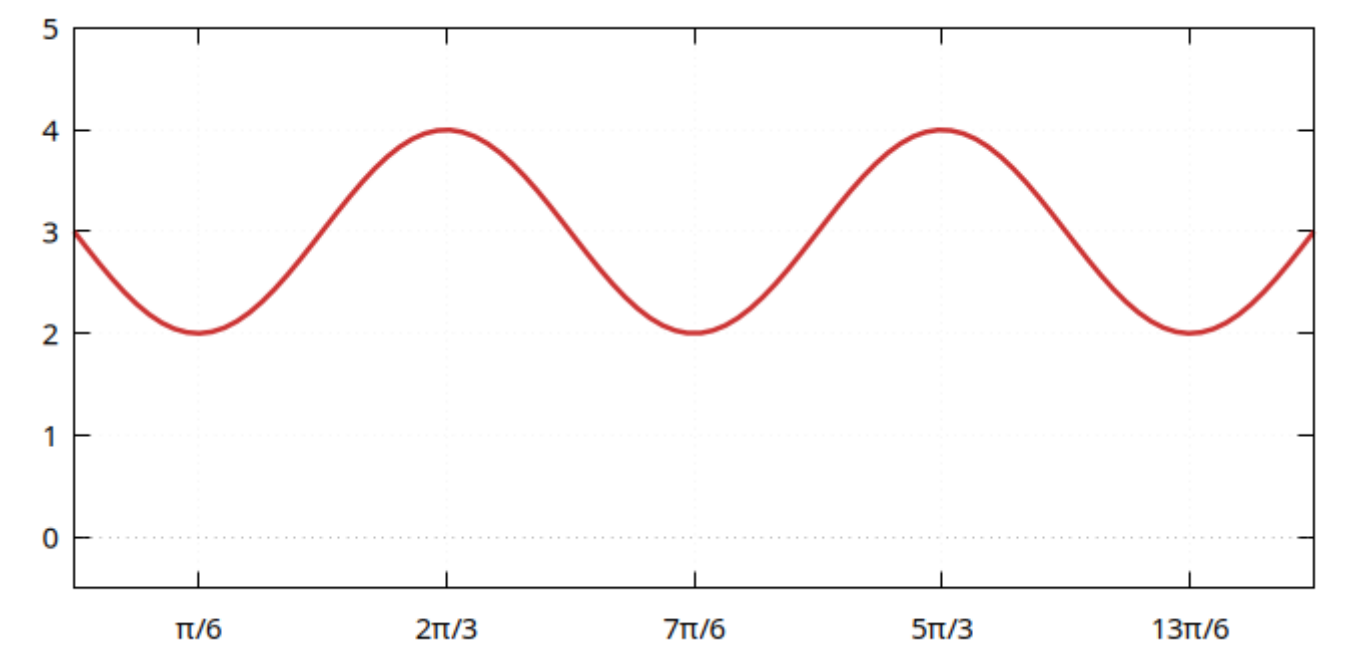
$$y = 4 \cos \left[4 \left(x - \frac{7\pi}{24} \right) \right] + 2$$

38) Pour la fonction $g(x) = -\cos \left[2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right] + 3$, remplis le tableau de renseignements, puis trace deux cycles de la fonction transformée en utilisant des transformations de la fonction mère. Choisis une échelle appropriée. [7]

Amplitude	Période
$= a = 1$	$= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ radians

Déphasage	Déplacement vertical
$\frac{\pi}{6}$ vers la droite	3 vers le haut
Max	Min
$= c + a = 3 + 1 = 4$	$= c - a = 3 - 1 = 2$

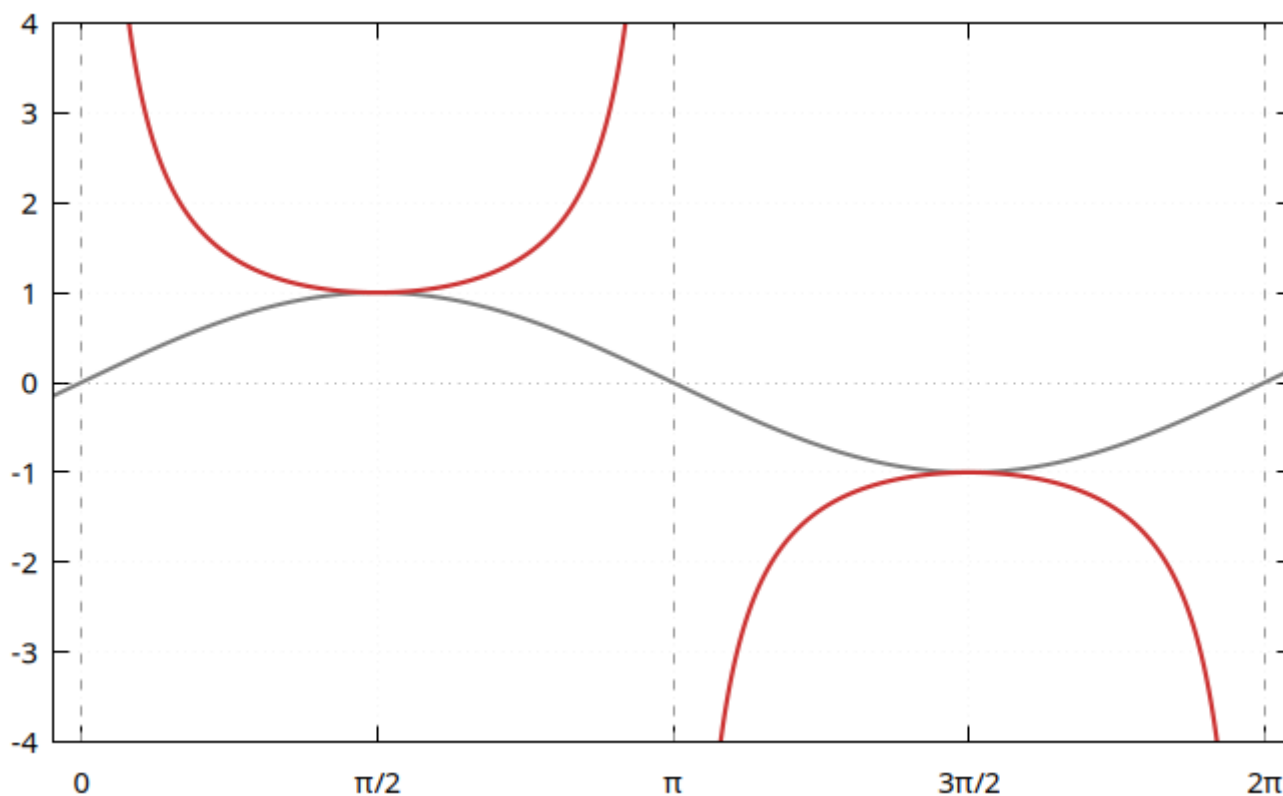
$y = \cos x$	
x	y
0	1
$\pi/2$	0
π	-1
$3\pi/2$	0
2π	1
$g(x)$, en utilisant $x_{\text{nouv}} = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$ et $y_{\text{nouv}} = -y + 3$	
x	y
$\pi/6$	2
$5\pi/12$	3
$2\pi/3$	4
$11\pi/12$	3
$7\pi/6$	2



39) Complète le tableau de valeurs suivant pour la fonction $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \csc(x)$. Utilise les triangles spéciaux, le cercle trigonométrique, ou une calculatrice pour trouver les valeurs de la fonction. Trace ensuite les deux fonctions sur la même grille. Dessine les asymptotes où nécessaire.

x	$f(x)$	$g(x)$
0	0	n.d.
$\pi/6$	$1/2$	2
$2\pi/6 = \pi/3$	0.87	1.15
$3\pi/6 = \pi/2$	1	1
$4\pi/6 = 2\pi/3$	0.87	1.15
$5\pi/6$	$1/2$	2
$6\pi/6 = \pi$	0	n.d.

$7\pi/6$	$-1/2$	-2
$8\pi/6 = 4\pi/3$	-0.87	-1.15
$9\pi/6 = 3\pi/2$	-1	-1
$10\pi/6 = 5\pi/3$	-0.87	-1.15
$11\pi/6$	$-1/2$	-2
$12\pi/6 = 2\pi$	0	n.d.



40) Une grande roue dans un parc d'attractions complète une révolution toutes les 60 secondes. La roue a un rayon de 20 mètres et son centre est à 22 mètres au-dessus du sol. Suppose que le passager commence au bas.

a) Modélise la hauteur du passager au-dessus du sol à l'aide d'une fonction sinus

$$a = \frac{42 - 2}{2} = 20$$

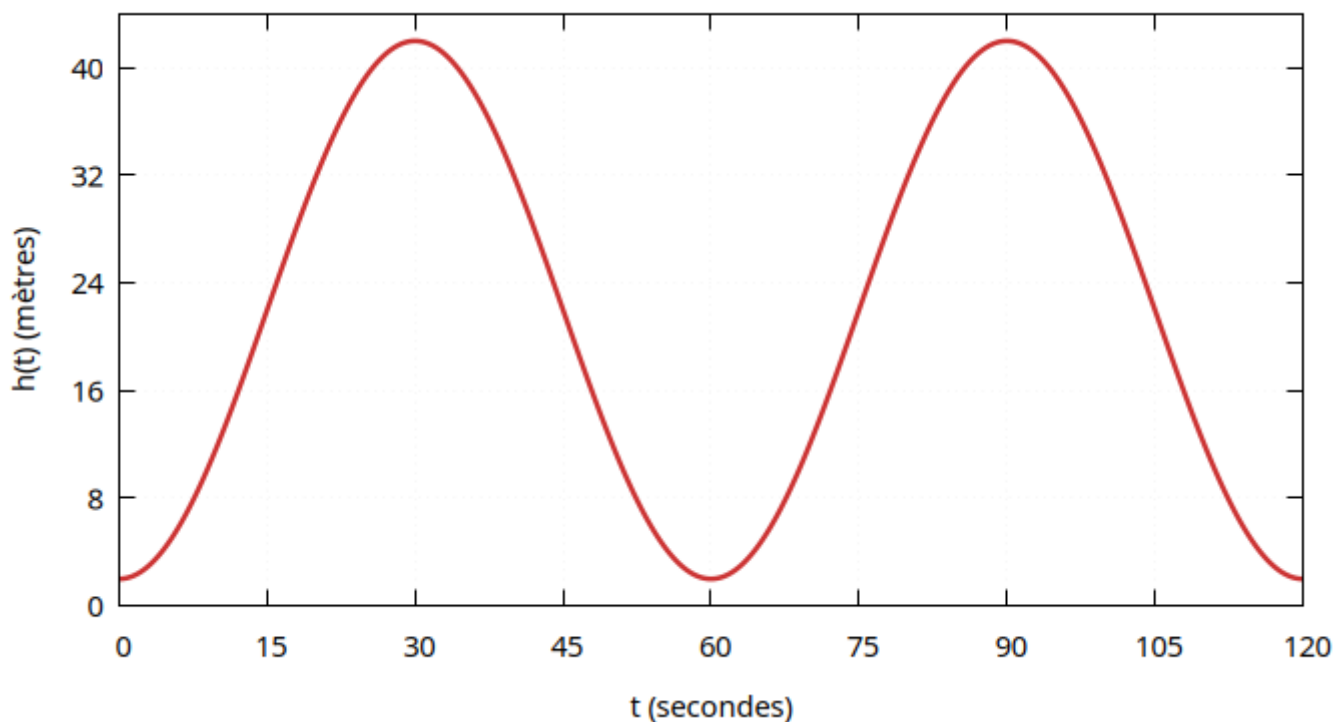
$$k = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$$

$$d_{\sin} = \frac{60}{4} = 15$$

$$c = 42 - 20 = 22$$

$$h(t) = 20 \sin \left[\frac{\pi}{30}(t - 15) \right] + 22$$

b) Esquisse un graphique de la hauteur du passager au-dessus du sol pour 2 cycles.



Unité 5 : Identités et équations trigonométriques

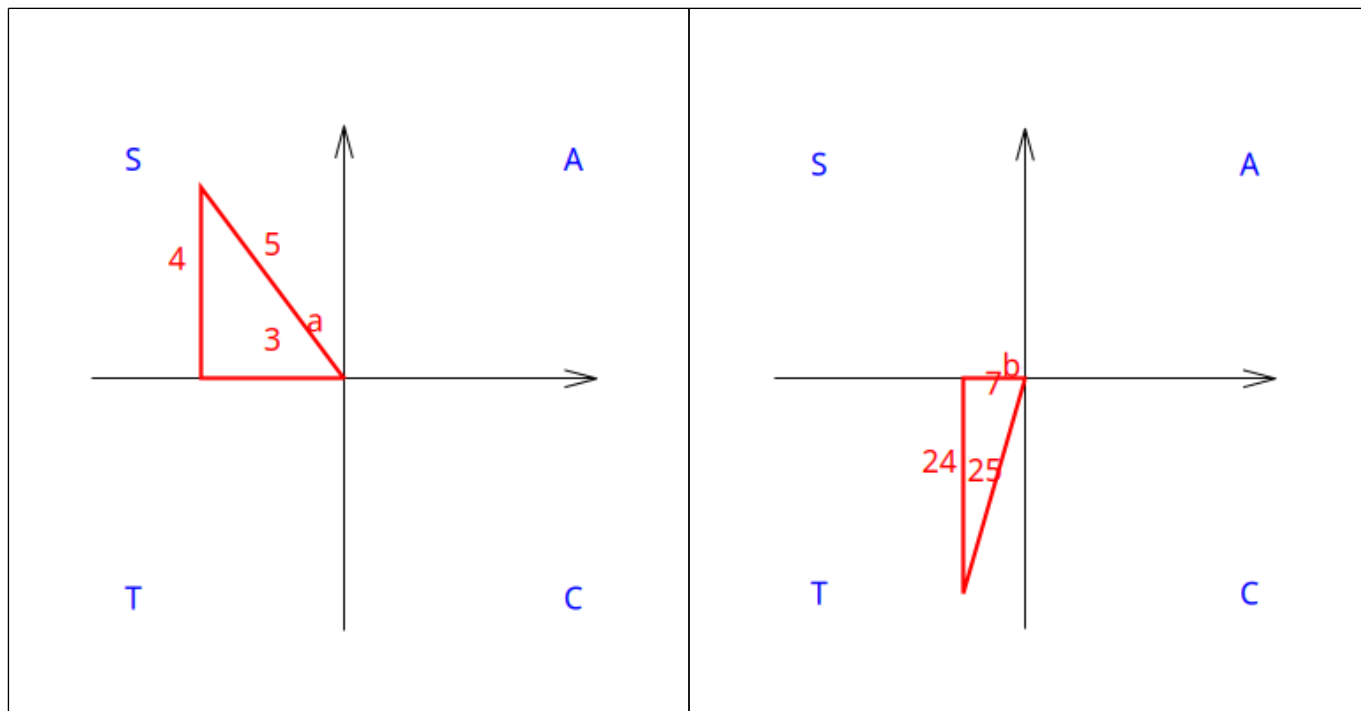
41) Utilise une formule d'angle composé appropriée pour exprimer comme une seule fonction trigonométrique, puis détermine une valeur exacte pour chacune.

a) $\sin \pi \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi \sin \frac{\pi}{2}$	b) $\cos \pi \cos \frac{\pi}{2} + \sin \pi \sin \frac{\pi}{2}$
$= \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right)$	$= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right)$
$= \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right)$	$= \cos \left(\frac{\pi}{2} \right)$
$= -1$	$= 0$

42) Utilise une formule d'angle composé appropriée pour déterminer une valeur exacte pour chacune.

a) $\cos \frac{\pi}{12}$	b) $\sin \frac{11\pi}{12}$
$= \cos \left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} \right)$	$= \sin \left(\frac{8\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} \right)$
$= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$	$= \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$
$= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$	$= \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$
$= \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$	$= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \left(-\cos \frac{\pi}{3} \right) \left(\sin \frac{\pi}{4} \right)$
$= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$
	$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

43) L'angle a se situe dans le deuxième quadrant et l'angle b se situe dans le troisième quadrant tels que $\cos a = -\frac{3}{5}$ et $\tan b = \frac{24}{7}$. Détermine une valeur exacte pour



a) $\cos(a + b)$

$$= \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$= \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{7}{25}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{24}{25}\right)$$

$$= \frac{21 + 96}{125} = \frac{117}{125}$$

b) $\sin(a - b)$

$$= \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{7}{25}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{24}{25}\right)$$

$$= \frac{-28 - 72}{125} = \frac{-100}{125} = -\frac{4}{5}$$

c) $\sin(2a)$

$$= 2 \sin a \cos a$$

$$= 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= -\frac{24}{25}$$

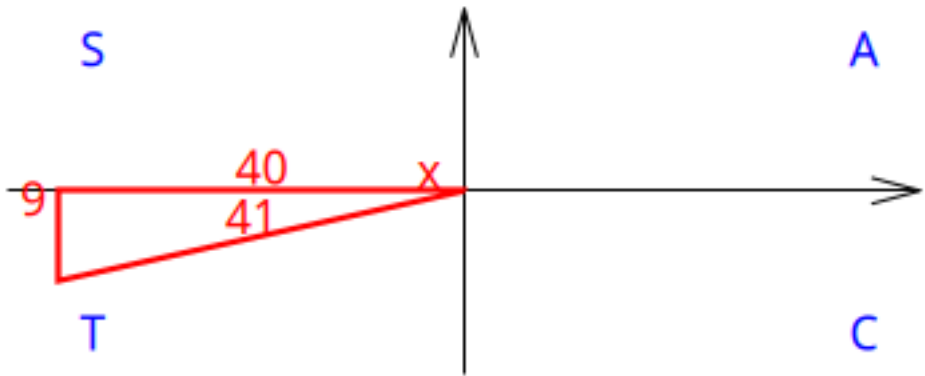
d) $\cos(2b)$

$$= \cos^2 b - \sin^2 b$$

$$= \left(-\frac{7}{25}\right)^2 - \left(-\frac{24}{25}\right)^2$$

$$= \frac{49 - 576}{625} = -\frac{527}{625}$$

44) L'angle x se situe dans le troisième quadrant, et $\tan x = \frac{9}{40}$. Détermine une valeur exacte pour $\cos(2x)$.



$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \left(-\frac{40}{41}\right)^2 - \left(-\frac{9}{41}\right)^2 \\ &= \frac{1600 - 81}{1681} = \frac{1519}{1681}\end{aligned}$$

45) Démontre les identités suivantes.

a) $\sec x - \tan x = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

MG	MD
$\begin{aligned}&= \sec x - \tan x \\ &= \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{1 - \sin x}{\cos x}\end{aligned}$	$= \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

MG = MD

b) $(\csc x - \cot x)^2 = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

MG	MD
$= \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2$ $= \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right)^2$ $= \frac{(1 - \cos x)^2}{1 - \cos^2 x}$ $= \frac{(1 - \cos x)^2}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$ $= \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$	$= \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

MG = MD

c) $\sin(2a) = \frac{2 \tan a}{\sec^2 a}$

MG	MD
$= \sin(2a)$ $= 2 \sin a \cos a$	$= \frac{2 \tan a}{\sec^2 a}$ $= 2 \left(\frac{\sin a}{\cos a} \right) \cos^2 a$ $= 2 \sin a \cos a$

MG = MD

d) $\cos(x + y)\cos(x - y) = \cos^2 x + \cos^2 y - 1$

MG	MD
$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y)(\cos x \cos y + \sin x \sin y)$ $= \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y$ $= \cos^2 x \cos^2 y - (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 y)$ $= \cos^2 x \cos^2 y - 1 + \cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 x \cos^2 y$ $= \cos^2 x + \cos^2 y - 1$	$= \cos^2 x + \cos^2 y - 1$

MG = MD

e) $\frac{\cos(2x)}{1 - \sin(2x)} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

MG	MD
$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - 2 \sin x \cos x}$ $= \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)^2}$ $= \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$	$= \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

MG = MD

f) $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

MG	MD
$= \sin(2x)$ $= \sin(x + x)$ $= \sin x \cos x + \cos x \sin x$ $= 2 \sin x \cos x$	$= 2 \sin x \cos x$

MG = MD

g) $\frac{\tan x - \tan y}{\cot x - \cot y} = -\tan x \tan y$

MG	MD
$\begin{aligned} &= \frac{\tan x - \tan y}{\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan y}} \\ &= \frac{\tan x - \tan y}{\frac{\tan y - \tan x}{\tan x \tan y}} \\ &= (\tan x - \tan y) \left(\frac{\tan x \tan y}{\tan y - \tan x} \right) \\ &= -\tan x \tan y \end{aligned}$	$= -\tan x \tan y$

MG = MD

h) $\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \sin(2x)$

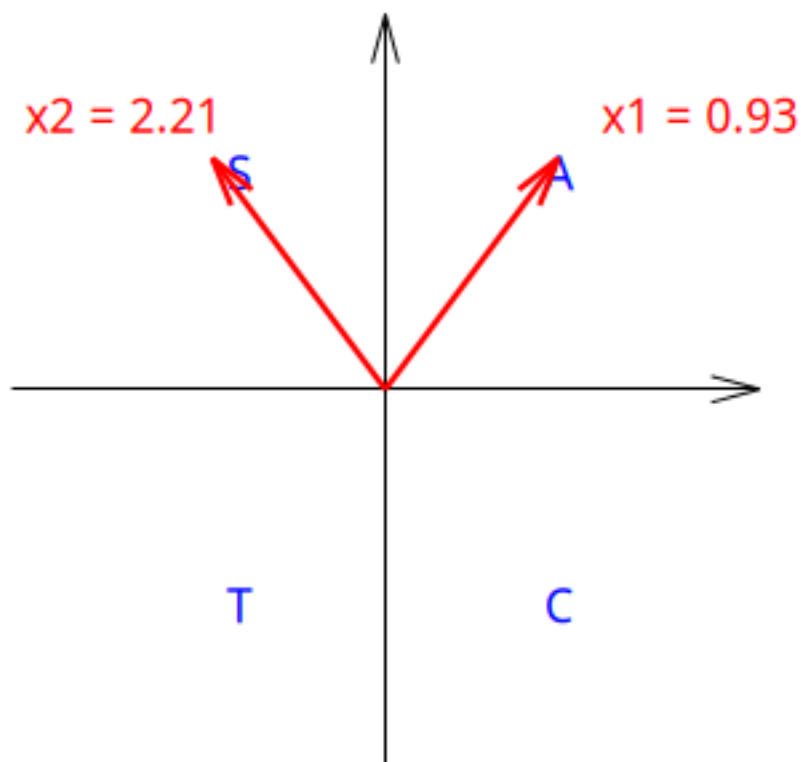
MG	MD
$\begin{aligned} &= \frac{2 \tan x}{\sec^2 x} \\ &= 2 \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) \cos^2 x \\ &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= \sin(2x) \\ &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$

MG = MD

46) Détermine les solutions pour chaque équation dans l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$, au centième de radian près. Donne des réponses exactes lorsque c'est possible.

a) $\sin x - 0.8 = 0$

$\sin x = 0.8$



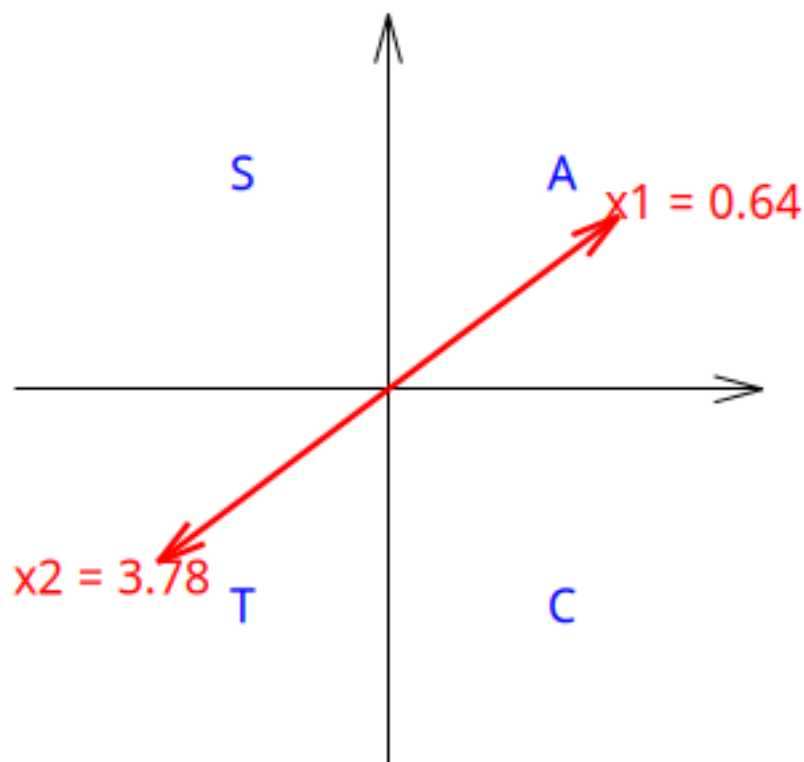
$$x = \sin^{-1}(0.8)$$

$$x_1 \approx 0.93$$

$$x_2 = \pi - 0.93 \approx 2.21$$

$$\text{b) } \tan x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\tan x = \frac{3}{4}$$



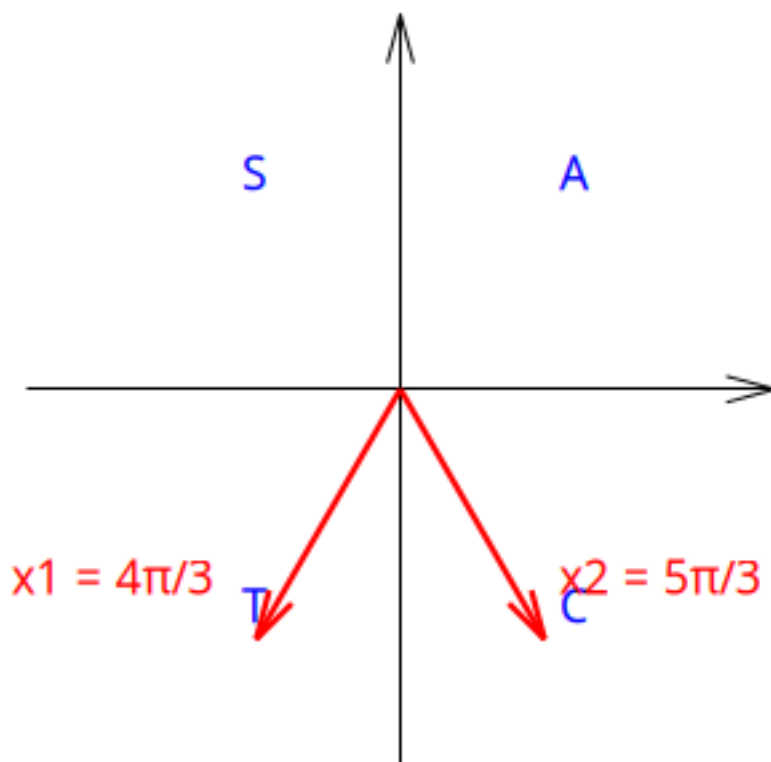
$$x_1 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.64$$

$$x_2 = \pi + 0.64 \approx 3.78$$

$$c) 2\sin x = -\sqrt{3}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

À partir du triangle spécial : $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; place dans QIII et QIV



$$x_1 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

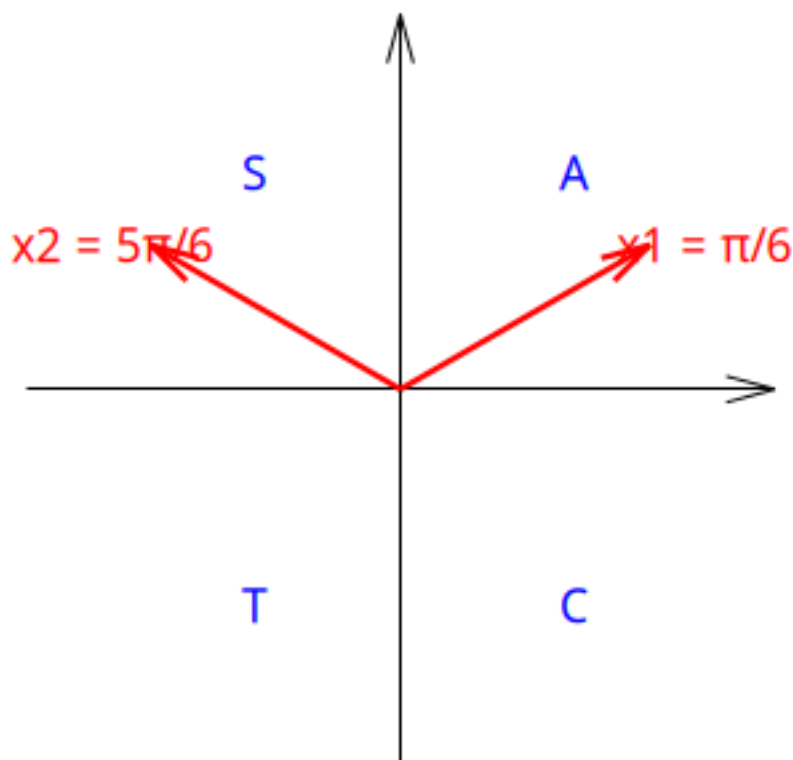
d) $2\sin x \cos x - \cos x = 0$

$$\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ ou } 2\sin x - 1 = 0$$

À partir du cercle trigonométrique, $\cos x = 0$: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$; à partir du triangle spécial: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; place dans QI et QII



$$x_3 = \frac{\pi}{6}, x_4 = \frac{5\pi}{6}$$

e) $\csc^2 x = 2 + \csc x$

$$\csc^2 x - \csc x - 2 = 0$$

$$(\csc x - 2)(\csc x + 1) = 0$$

$$\csc x = 2 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}; \text{ de la partie d) : } x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

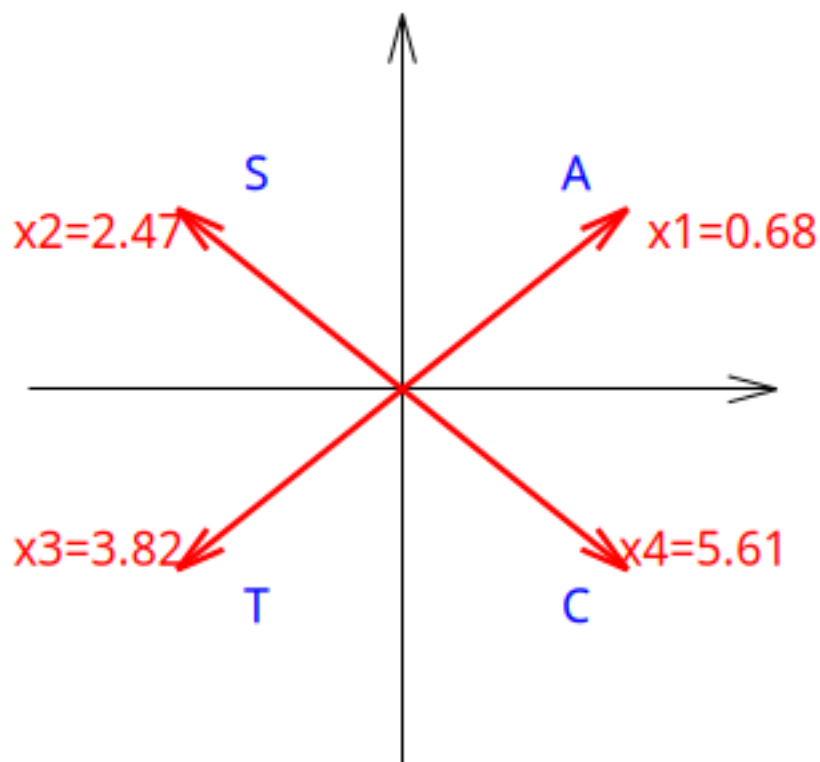
$$\csc x = -1 \Rightarrow \sin x = -1; \text{ à partir du cercle trigonométrique : } x_3 = \frac{3\pi}{2}$$

g) $64\sin^2 x - 25 = 0$

$$\sin^2 x = \frac{25}{64}$$

$$\sin x = \pm \frac{5}{8}$$

Place 0.6751 dans QI, QII, QIII, et QIV



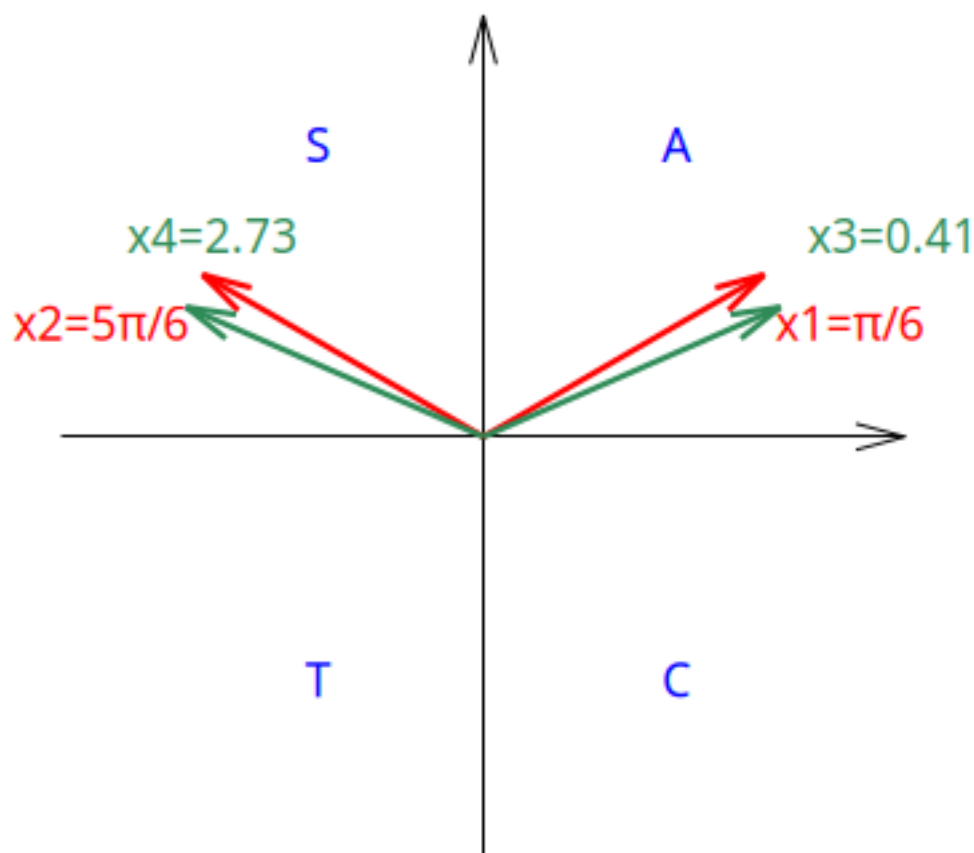
$$x_1 \approx 0.68, x_2 \approx 2.47, x_3 \approx 3.82, x_4 \approx 5.61$$

h) $2 \csc^2 x - 9 \csc x + 10 = 0$

$$(\csc x - 2)(2 \csc x - 5) = 0$$

$$\csc x = 2 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}; \text{ de la partie d), place dans QI et QII}$$

$$\csc x = \frac{5}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2}{5}; \text{ à partir de } \sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right), \text{ place dans QI et QII}$$

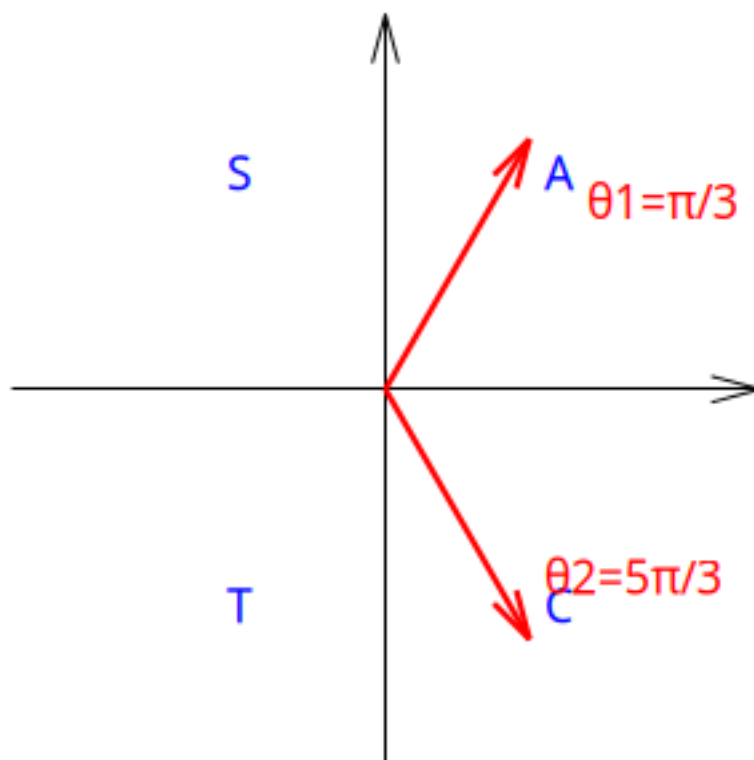


$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 \approx 0.41, x_4 \approx 2.73$$

i) $2\cos(2x) = 1$

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}; \text{ soit } \theta = 2x$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}; \text{ à partir du triangle spécial : } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \text{ place dans QI et QIV}$$



$$\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \theta_2 = \frac{5\pi}{3}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$2x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

Ajoute une période de π pour trouver les autres réponses dans $[0, 2\pi]$:

$$x_3 = x_1 + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

$$x_4 = x_2 + \pi = \frac{11\pi}{6}$$

Unité 6 : Équations/inéquations rationnelles et taux de variation

47) Résous chaque équation

a) $\frac{x-2}{3x-1} = \frac{2}{x+1}$

$$(x+1)(x-2) = 2(3x-1)$$

$$x^2 - x - 2 = 6x - 2$$

$$x^2 - 7x = 0$$

$$x(x-7) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 7$$

b) $3 = \frac{6}{2x^2 - x - 4}$

$$3(2x^2 - x - 4) = 6$$

$$6x^2 - 3x - 12 = 6$$

$$6x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$3(2x^2 - x - 6) = 0$$

$$3(2x - 4x + 3x - 6) = 0 \Rightarrow 3[2x(x - 2) + 3(x - 2)] = 0$$

$$(x - 2)(2x + 3) = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = -\frac{3}{2}$$

48) Résous chaque inéquation

a) $\frac{2x - 3}{x + 5} > \frac{2x + 7}{x - 3}$

$$\frac{2x - 3}{x + 5} - \frac{2x + 7}{x - 3} > 0$$

$$\frac{(x - 3)(2x - 3) - (2x + 7)(x + 5)}{(x + 5)(x - 3)} > 0$$

$$\frac{2x^2 - 9x + 9 - (2x^2 + 17x + 35)}{(x + 5)(x - 3)} > 0$$

$$\frac{-26x - 26}{(x + 5)(x - 3)} > 0$$

$$\frac{-26(x + 1)}{(x + 5)(x - 3)} > 0$$

Abscisse à l'origine : $x = -1$; restrictions : $x \neq -5, 3$

Solution : $x < -5$ ou $-1 < x < 3$, c.-à-d. $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3)$

b) $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + 5x + 4} \leq 0$

$$\frac{(x - 3)(x - 5)}{(x + 4)(x + 1)} \leq 0$$

Abscisses à l'origine : $x = 3, 5$; restrictions : $x \neq -4, -1$

Solution : $-4 < x < -1$ ou $3 \leq x \leq 5$, c.-à-d. $x \in (-4, -1) \cup [3, 5]$

49) La population d'une petite ville, p , est modélisée par la fonction $p(t) = 10\,050 + 225t - 20t^2$, où t est le temps en années à partir de maintenant. Détermine le taux de variation moyen de la population de

a) l'année 0 à l'année 5

$$m = \frac{p(5) - p(0)}{5 - 0}$$

$$m = \frac{10\,675 - 10\,050}{5}$$

$$m = 125 \text{ personnes/année}$$

b) l'année 5 à l'année 8

$$m = \frac{p(8) - p(5)}{8 - 5}$$

$$m = \frac{10\,570 - 10\,678}{3}$$

$$m \approx -36 \text{ personnes/année}$$

50) Un ballon de soccer est botté dans les airs. Le tableau de valeurs suivant montre la hauteur du ballon au-dessus du sol à divers moments de son vol :

Temps (secondes)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
Hauteur (mètres)	0.5	11.78	20.6	26.98	30.9	32.38	31.4	27.98	22.1	13.78	3.0

a) Trouve le taux de variation moyen de la hauteur du ballon au cours des 3 premières secondes.

$$m = \frac{h(3) - h(0)}{3 - 0}$$

$$m = \frac{31.4 - 0.5}{3}$$

$$m \approx 10.3 \text{ m/s}$$

b) Estime le taux de variation instantané de la hauteur à 4 secondes.

Méthode 1 (intervalle environnant) :

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=4} \approx \frac{h(4.5) - h(3.5)}{4.5 - 3.5} = \frac{13.78 - 27.98}{1} \approx -14.2 \text{ m/s}$$

Méthode 2 (moyenne des taux moyens précédent et suivant) :

$$m \text{ pour } 3.5 \leq t \leq 4: \frac{22.1 - 27.98}{4 - 3.5} \approx -11.76$$

$$m \text{ pour } 4 \leq t \leq 4.5: \frac{13.78 - 22.1}{4.5 - 4} \approx -16.64$$

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=4} \approx \frac{-11.76 + (-16.64)}{2} \approx -14.2 \text{ m/s}$$

51) Utilise le tableau ci-dessous pour calculer plusieurs taux de variation moyens afin de t'aider à estimer le taux de variation instantané pour la fonction $f(x) = -2x^2 + x$ à $x = 1$. Aie une précision de 4 décimales dans la colonne $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Intervalle	Changement de $y = \Delta y$	Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Taux de variation moyen}$
$0 \leq x \leq 1$	$f(1) - f(0) = -1 - 0 = -1$	$1 - 0 = 1$	-1
$0.5 \leq x \leq 1$	$f(1) - f(0.5) = -1 - 0 = -1$	$1 - 0.5 = 0.5$	-2
$0.9 \leq x \leq 1$	$f(1) - f(0.9) = -1 - (-0.72) = -0.28$	$1 - 0.9 = 0.1$	-2.8
$0.99 \leq x \leq 1$	$f(1) - f(0.99) = -1 - (-0.9702) = -0.0298$	$1 - 0.99 = 0.01$	-2.98

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} \approx -3$$

52) Utilise le quotient de Newton pour trouver l'équation de la dérivée de chacune des fonctions suivantes. Trouve aussi le taux de variation instantané pour la fonction lorsque $x = 4$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a) $f(x) = x^2 + 6$	b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 6 - (x^2 + 6)}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 + 3(x+h) - 4 - (2x^2 + 3x - 4)}{h}$
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 6 - x^2 - 6}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 3x + 3h - 4 - 2x^2 - 3x + 4}{h}$
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 + 3h}{h}$
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h + 3)}{h}$
$f'(x) = 2x + 0$	$f'(x) = 4x + 2(0) + 3$
$f'(x) = 2x$	$f'(x) = 4x + 3$
$f'(4) = 2(4) = 8$	$f'(4) = 4(4) + 3 = 19$

53) Détermine l'équation de la tangente à $x = 3$ pour la fonction $f(x) = 5x^2 - 10x - 7$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h)^2 - 10(x+h) - 7 - (5x^2 - 10x - 7)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 - 10x - 10h - 7 - 5x^2 + 10x + 7}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(10x + 5h - 10)}{h}$$

$$f'(x) = 10x + 5(0) - 10$$

$$f'(x) = 10x - 10$$

$$f'(3) = 10(3) - 10 = 20; \text{ la pente de la tangente est } 20$$

$$f(3) = 5(3)^2 - 10(3) - 7 = 8; (3, 8) \text{ est sur la tangente}$$

$$y = mx + b$$

$$8 = 20(3) + b$$

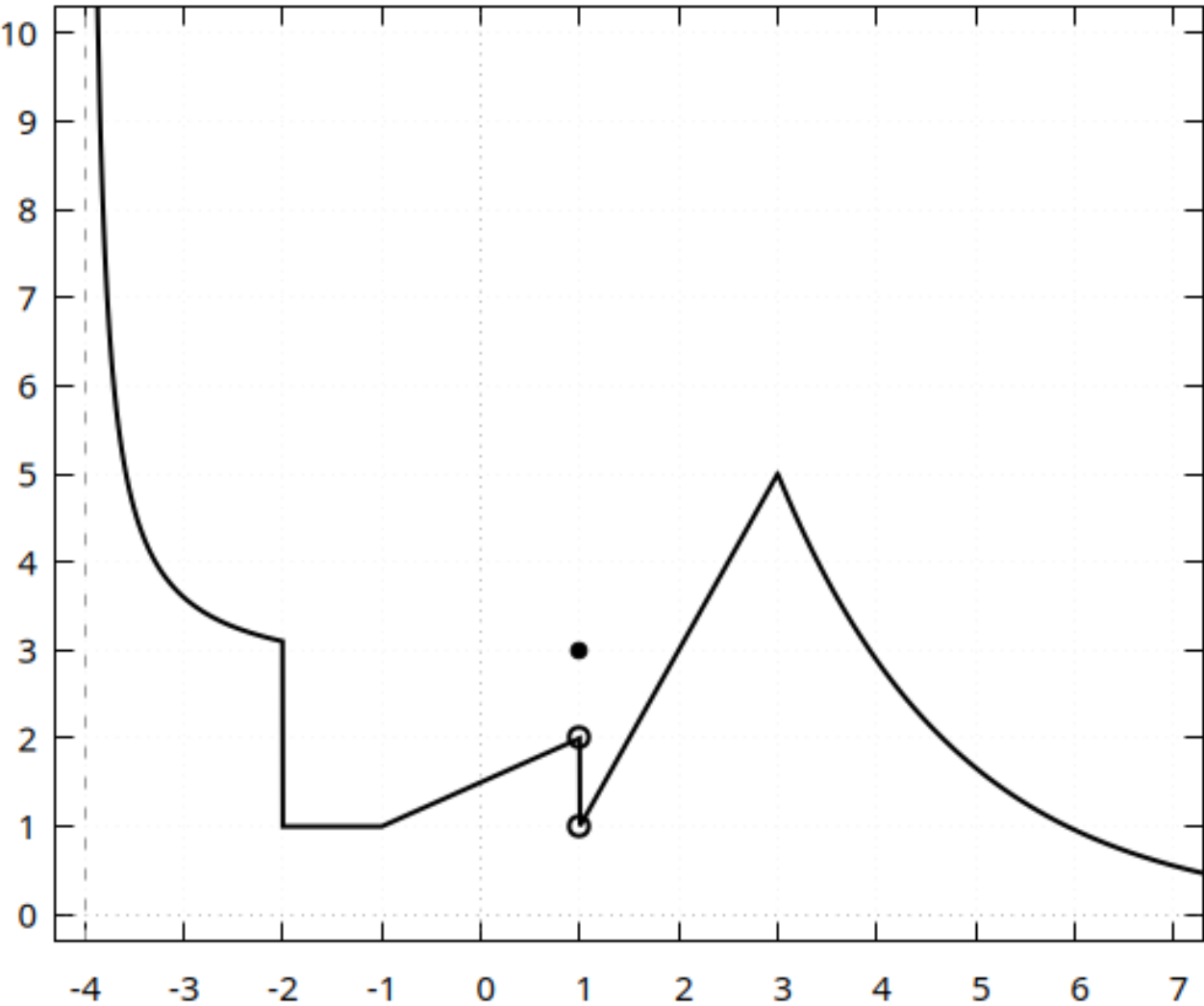
$$b = -52$$

$$y = 20x - 52$$

54) Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$	b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 5}$
$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5}$	$= \frac{2(3)^2 - 5(3) - 3}{3 - 5}$
$= \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5)$	$= \frac{0}{-2}$
$= 5 + 5 = 10$	$= 0$

55) Calcule les limites suivantes à l'aide du graphique fourni.

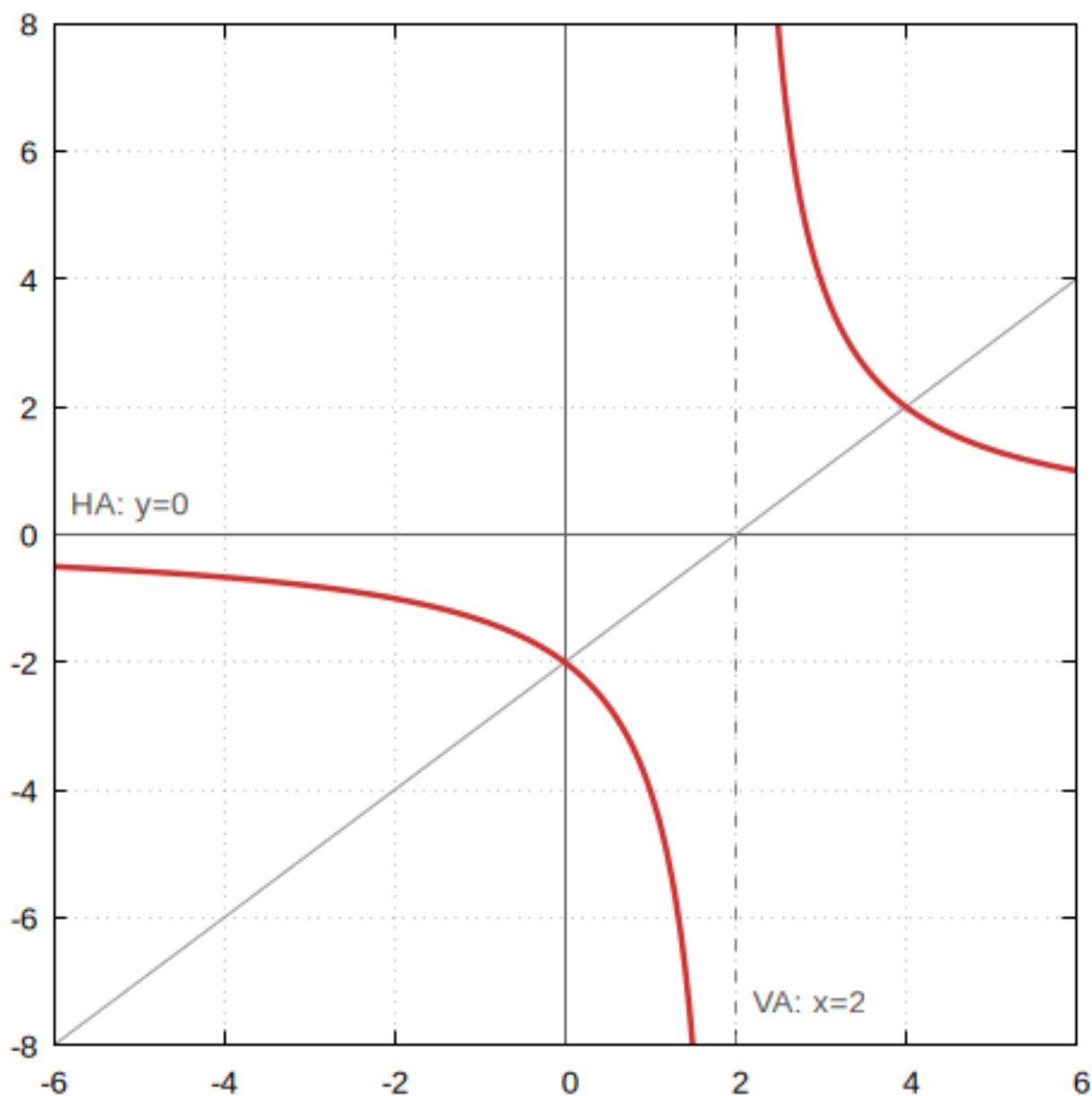


a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	b) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$	c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
$= 0$	$= \infty$	$= 1$
d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$	e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$	
$= 2$	n'existe pas	

Unité 7 : Représentation graphique

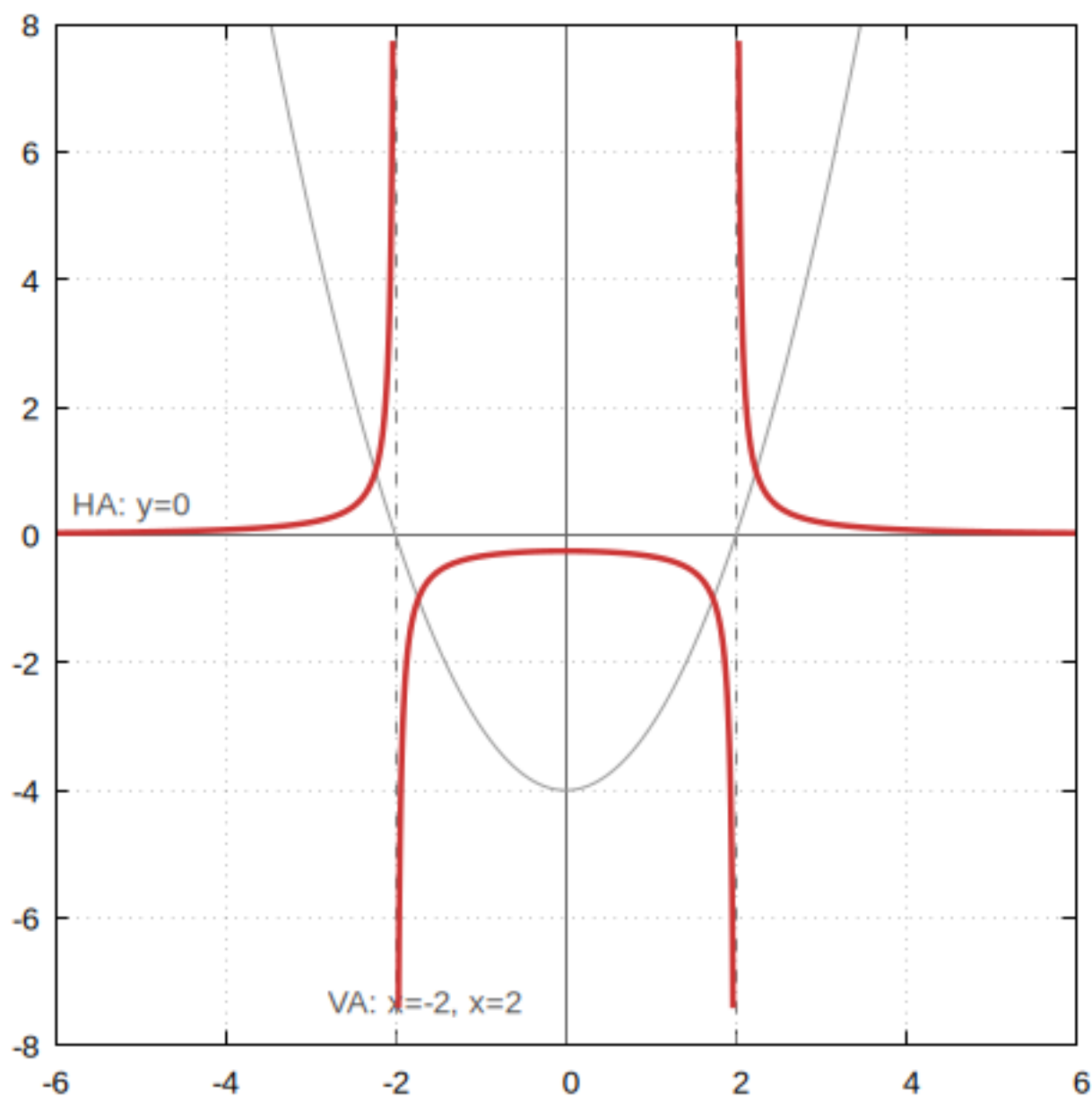
56) Trace le graphique de $f(x) = \frac{4}{x-2}$ en traçant d'abord le dénominateur, puis en traçant sa fonction inverse. N'oublie pas le 4 au numérateur! Indique les asymptotes

AV : $x = 2$; AH : $y = 0$



57) Trace le graphique de $g(x) = \frac{1}{x^2-4}$ en traçant d'abord le dénominateur, puis trace sa fonction inverse. Indique les asymptotes.

AV : $x = -2$ et $x = 2$; AH : $y = 0$



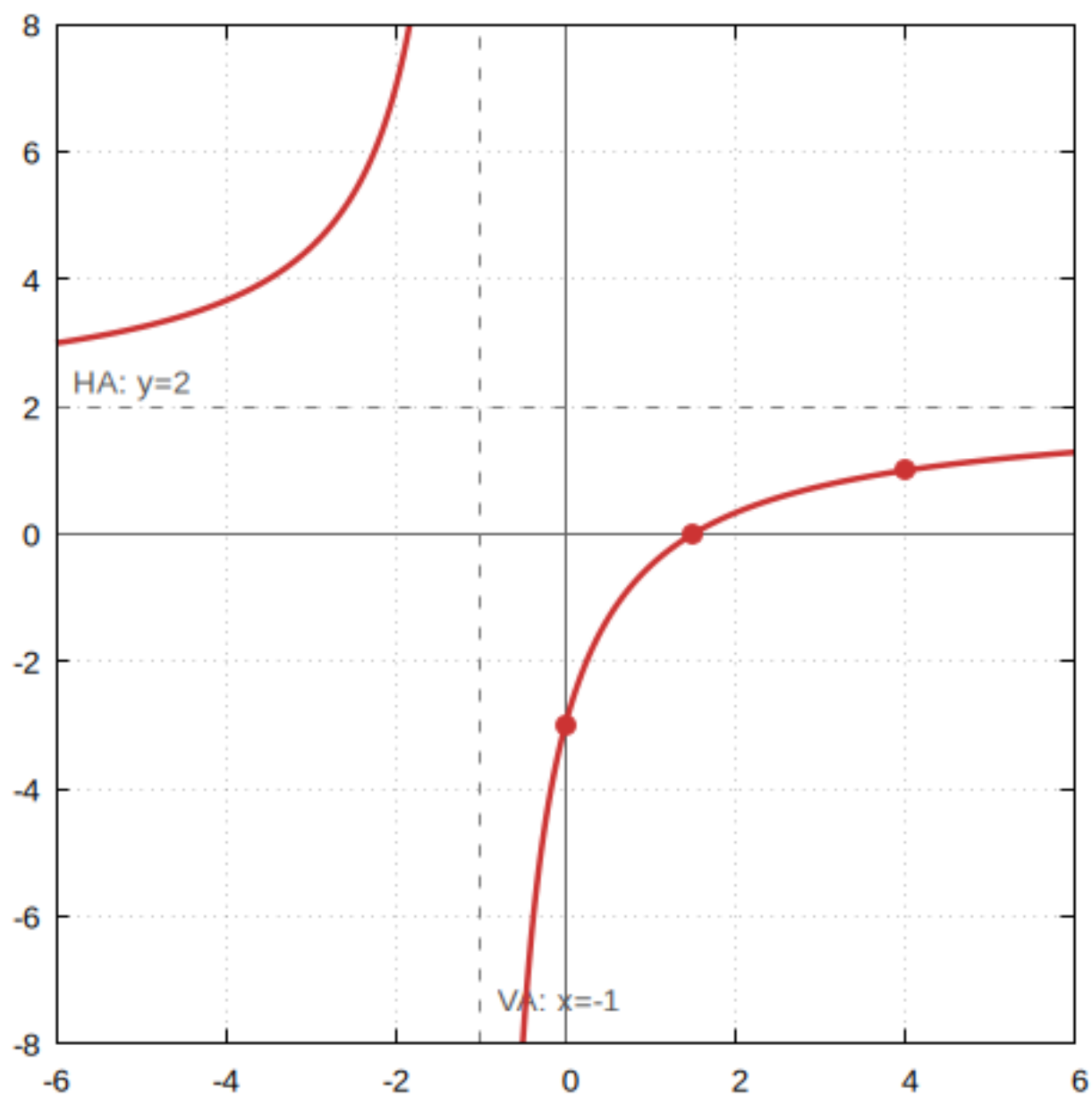
58) Trace le graphique de la fonction $h(x) = \frac{2x-3}{x+1}$. Énonce clairement les caractéristiques clés de ce graphique, y compris les asymptotes et les abscisses/ordonnées à l'origine.

AV : $x = -1$; AH : $y = 2$

Abscisse à l'origine : $0 = 2x - 3 \Rightarrow x = 1.5$; $(1.5, 0)$

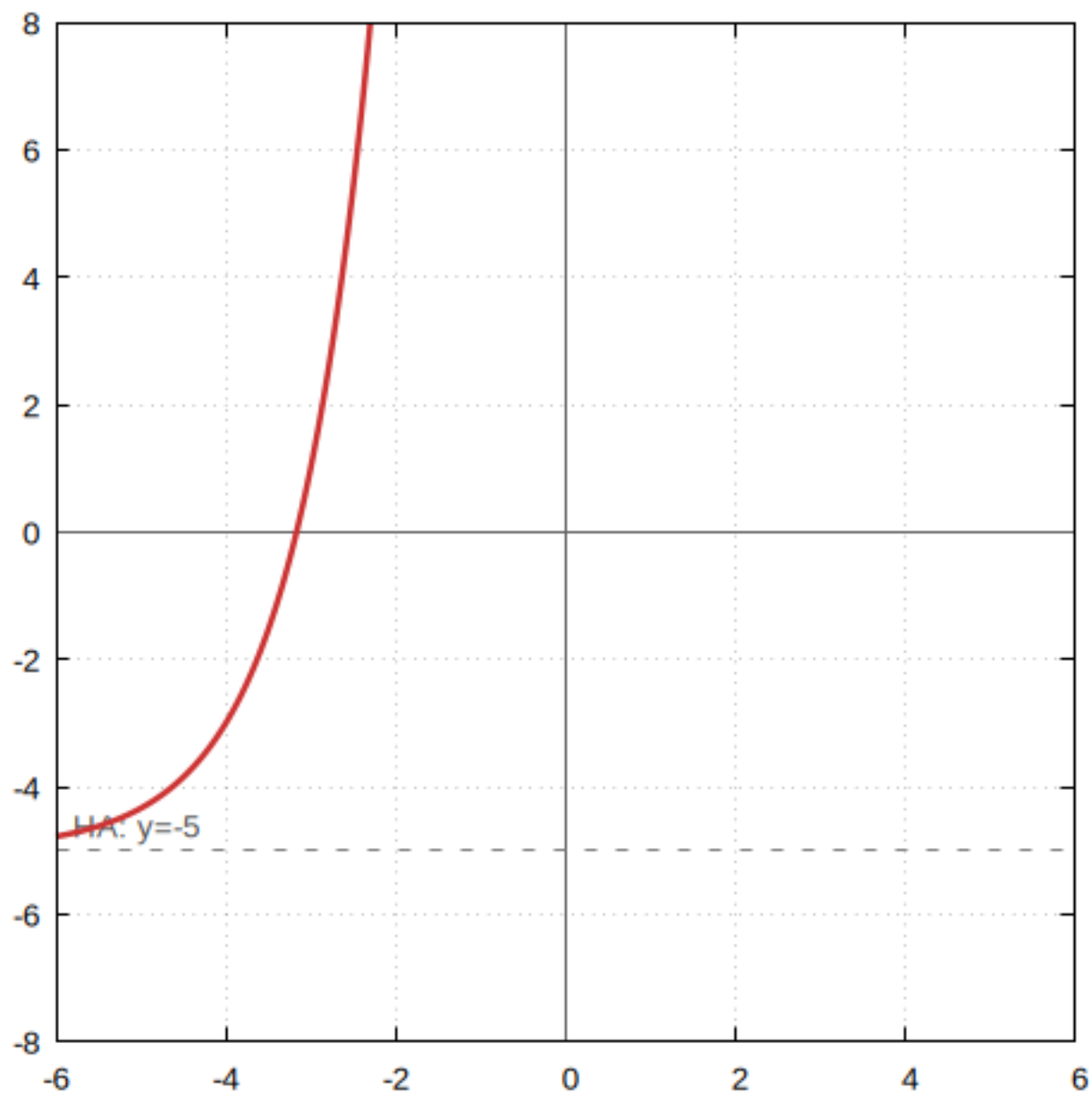
Ordonnée à l'origine : $h(0) = \frac{-3}{1} = -3$; $(0, -3)$

Autre point : $h(4) = \frac{2(4)-3}{4+1} = 1$; $(4, 1)$



59) Trace le graphique de la fonction transformée $h(x) = 2(3)^{x+4} - 5$ à l'aide de transformations.

$y = 3^x$	
x	y
-1	0.33
0	1
1	3
AH	$y = 0$
$h(x)$, en utilisant $x_{\text{nouv}} = x - 4$ et $y_{\text{nouv}} = 2y - 5$	
x	y
-5	-4.33
-4	-3
-3	1
AH	$y = -5$



60) Évalue chacune des expressions suivantes, exactes à 3 décimales près.

a) e^5	b) $\ln 200$
≈ 148.413	≈ 5.298

61) Simplifie l'expression suivante $\ln e^{2x}$

$= 2x \ln(e)$
 $= 2x(1)$
 $= 2x$

62) Résous les équations suivantes, exactes à 3 décimales près.

a) $e^x = 5$	b) $1000 = 20e^{x/4}$
$x = \ln(5)$ $x \approx 1.609$	$50 = e^{x/4}$ $\frac{x}{4} = \ln(50)$ $x = 4 \ln(50) \approx 15.648$

63) Étant donné que $g(x) = x + 5$ et $f(x) = x^2 + 4x - 1$, trouve une formule pour ce qui suit...

a) $f(g(x))$	b) $g(f(x))$
$= f(x + 5)$ $= (x + 5)^2 + 4(x + 5) - 1$ $= x^2 + 10x + 25 + 4x + 20 - 1$ $= x^2 + 14x + 44$	$= g(x^2 + 4x - 1)$ $= x^2 + 4x - 1 + 5$ $= x^2 + 4x + 4$
c) $g^{-1}(f(x))$	d) $f(x) - g(x)$
$x = y + 5 \Rightarrow y = x - 5 \Rightarrow g^{-1}(x) = x - 5$ $g^{-1}(f(x)) = (x^2 + 4x - 1) - 5$ $= x^2 + 4x - 6$	$= x^2 + 4x - 1 - (x + 5)$ $= x^2 + 4x - 1 - x - 5$ $= x^2 + 3x - 6$